neueren Geometrie

Anfangsgründe

der

neueren Geometrie

für die

oberen Klassen von Gymnasien und Realschulen

von

Dr. F. X. Stoll,

Lehrer der Mathematik am Großherzoglichen Gymnasium zu Bensheim.

Mit sechzehn Figurentafeln.

Bensheim, 1872.

Verlag der Lehrmittelanstalt.

Ehrhard & Comp.

Druck von Chr. Fr. Will. Darmstadt.

Vorrede.

Die synthetische Geometrie hat seit den dreißiger Jahren durch die Bemühungen der deutschen Mathematiker Möbius, Steiner und Staudt und der französischen Poncelet, Gergonne und Chasles außerordentliche Fortschritte gemacht in Folge einer Verallgemeinerung ihrer Methoden, die es ihr ermöglicht, in dieser Beziehung mit der analytischen Geometrie zu wetteifern, ja diese selbst mit neuer Lebenskraft zu befruchten. Indem man von der Betrachtung der einfachsten Gebilde der Ebene und des Raumes, der Punktreihe, des ebenen Strahlenbüschels und des Ebenenbüschels ausging, errichtete man auf diesen einfachen Grundlagen ein Gebäude, welches überall den Zusammenhang der es bildenden Theile und die Nothwendigkeit ihrer Einfügung in das Ganze erkennen und es so als einen Organismus erscheinen ließ, in welchem die ganze Masse des Stoffes einer leitenden Idee dienstbar wurde und dieselbe durch ihre Anordnung und gegenseitige Abhängigkeit klar zur Anschauung brachte. Nicht mit Unrecht hat daher Gretschel dieser neuen Disciplin den Namen der organischen Geometrie beigelegt. (Vgl. auch noch Jakob Steiner in der Vorrede zu seinem berühmten Buche: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Berlin 1832).

Nun kann es zwar nicht die Aufgabe der Schule sein, den geometrischen Unterricht gleich nach dieser neuen Methode zu beginnen; denn die ältere hat ihre historische Berechtigung

und ist auch deshalb unentbehrlich, weil gar manche Parthien der Elementargeometrie, wie namentlich Flächen- und Körperinhaltsbestimmungen und gar manche metrische Verhältnisse nur schwer oder gar nicht nach der neuen Methode entwickelt werden könnten, deren Haupterfolge in der Auffindung von Lagenverhältnissen der Figuren bestehen, wenn sie auch metrische Beziehungen nicht principiell ausschließt. Aber nach Abschluß des auf Gymnasien und Realschulen üblichen Cursus der Planimetrie und Stereometrie ist es jedenfalls ersprießlicher, statt der auf dem Standpunkte der abstracten Rechnung und des Symboles stehenden analytischen Geometrie die ebensoviel, wenn nicht mehr leistende neuere synthetische Geometrie zu lehren, weil diese auf das nämliche Princip, wie die Elementargeometrie, nämlich auf das der Anschauung sich gründet, wodurch der Uebergang zu der neuen Disciplin wesentlich erleichtert ist, ganz abgesehen davon, daß diesem Princip eine größere bildende Kraft zugeschrieben werden muß, als dem der analytischen Geometrie, deren Resultate zwar dem Schüler oft überraschend, aber weil er den sie mit den Prämissen verbindenden Faden nicht unmittelbar, sondern nur an der Hand der abstracten Rechnung zu verfolgen vermag, isolirt und zusammenhangslos erscheinen.

Das vorliegende Werkchen nun ist dazu bestimmt, Schülern der oberen Klassen von Gymnasien und Realschulen die Möglichkeit zu bieten, die Methoden der neueren Geometrie kennen zu lernen, ohne mit einem plötzlichen Sprung den Standpunkt verlassen zu müssen, den sie bei ihrem seitherigen Studium der Elementargeometrie eingenommen haben; es soll gewissermaßen eine Brücke sein, die ihnen diesen Uebergang von der älteren zur neueren Behandlungsweise der synthetischen Geometrie erleichtert.

Diesen Zweck vor Augen führe ich den Schüler nicht gleich in diejenigen Gebiete der neueren Geometrie ein, welche

von vornherein eine organische Behandlung derselben zulassen, sondern habe einen vorbereitenden Cursus vorangeschickt, der zu seinem Verständniß nichts weiter als die schon bekannten Lehrsätze der Elementargeometrie erfordert, indem ich mich dabei streng auf die Planimetrie beschränke, nicht als ob ich nicht wüßte, daß die stereometrische Betrachtungsweise dem Vortrage größere Allgemeinheit und Abrundung gäbe, sondern um an das Einfachste und allgemein Bekannte anknüpfen zu können; ist es ja doch einmal ein altes Herkommen, das aus pädagogischen Gründen nicht so bald wird verlassen werden, die Stereometrie auf die Planimetrie folgen zu lassen und nicht beide im Zusammenhang vorzutragen. Aus dem nämlichen Grunde habe ich auch wenigstens aus dem vorbereitenden Cursus alle goniometrischen Formeln verbannt und selbst später, wo sie vorkommen, die Darstellung so gehalten, daß der Lehrer nöthigenfalls, wenn er unter den gegebenen Sätzen eine verständige Auswahl trifft, sie vorläufig weglassen kann. Dagegen habe ich es mir nicht versagen können, das von Möbius mit so vielem Erfolg in dic synthetische Geometrie eingeführte Princip der Vorzeichen von Anfang an consequent anzuwenden. Ich glaube auch hierdurch nichts Neues eingeführt zu haben; denn bei einer rationellen Behandlung der Elementargeometrie von Seite des Lehrers, wie sie Baltzer in seinen Elementen der Mathematik demselben vorgezeichnet hat, muß dasselbe dem Schüler schon bekannt sein. Die Vortheile dieses Verfahrens zeigen sich schon gleich bei den an der Spitze des Werkchens stehenden zwei Hauptsätzen der Transversalentheorie, den Lehrsätzen des Menelaus und Ceva, mit ihren Umkehrungen, welche ohne das Princip der Zeichen sehr häufig namentlich in etwas verwickelteren Anwendungen nicht leicht von einander unterschieden werden könnten und den Schüler zu falschen oder zweifelhaften Resultaten führen würden. Solcher Anwendungen habe ich sehr viele gegeben, um den Schüler alsbald mit der Ueberzeugung von der Fruchtbar-

keit der neuen Anschauung zu erfüllen und ihm Eifer und Lust dazu einzuflößen. Indem ich dann auf die harmonische Theilung, die harmonischen Eigenschaften des Vierseits und Vierecks, die Lehre von Pol und Polare, den Carnot'schen und Chasles'schen, Pascal'schen und Brianchon'schen Lehrsatz übergehe, beschränke ich mich allerdings bei den letztgenannten Sätzen wie überhaupt im ganzen Büchlein nur auf den Kreis, aber nicht ohne den Schüler an jeder passenden Stelle auf die viel weiter tragende Bedeutung dieser Lehren aufmerksam zu machen und ihm die Perspective auf ein großes seiner ferneren Anstrengungen würdiges Feld zu eröffnen. Außerdem suchte ich auch hier schon das Princip der Dualität, das in der neueren Geometrie eine so große Rolle spielt, theils durch stillschweigende Aneinanderreihung der zusammengehörigen Lehrsätze, theils dadurch, daß ich wie beim Chasles'schen Lehrsatz pag. 33 ausdrücklich darauf aufmersam machte, unverkennbar für den aufmerksamen Schüler hervortreten zu lassen, so daß derselbe es vorläufig als Thatsache erfaßt, um dasselbe in den späteren Paragraphen von pag. 61 an als nothwendigen Ausfluß der Betrachtung der beiden Grundgebilde der Ebene zu erkennen. Im Anschluß an die Lehre von Potenz und Potenzlinie folgt dann in ähnlicher Behandlung die Lehre von der Involution, wobei ich auf die Verwendung des Chasles'schen Lehrsatzes zum Beweise des Lehrsatzes 5 pag. 49 aufmerksam mache, welche analog ist der Verwendung des Carnot'schen zum Beweise des Lehrsatzes 3 pag. 45. Die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten und Aehnlichkeitsaxen und eine zum Theil nach der alten zum Theil nach der neueren Methode durchgeführte Darstellung des Berührungsproblems, wodurch die Eleganz der letzteren deutlich hervortritt, schließen den vorbereitenden Cursus.

Indem ich jetzt die Grundzüge der Lehre von den Doppelverhältnissen, den projectivischen und perspectivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln vorführe, betrete ich das eigent-

liche Gebiet der neueren Geometrie, baue dasselbe aber nicht weiter aus, als es die von mir gegebenen Anwendungen auf einige merkwürdige Lehrsätze und Aufgaben erforderlich machen; die Lehre von den Kegelschnitten, in welcher die Fruchtbarkeit der neuen Methode allerdings erst im hellsten Lichte erscheint, habe ich principiell ausgeschlossen, weil über diesen Gegenstand schon mehrere treffliche Werke, wie die von Schröter herausgegebenen Vorlesungen Steiner's und Gretschel's organische Geometrie existiren, zu deren Studium mein Werkchen gewissermaßen nur eine Vorbereitung und Einführung sein soll. Dagegen werden die gegebenen Anwendungen den Schüler die gewaltige Kraft des neuen Werkzeugs ahnen lassen und ihn begierig machen, auch die letzten Consequenzen der erlernten Theorie in den erwähnten Werken aufzusuchen. Man soll ja überhaupt in der Schule weniger auf die Menge des zu verarbeitenden Stoffes den Hauptwerth legen, als vielmehr auf die fortwährende Anregung des Schülers, seiner geistigen Kraft bewußt und mächtig zu werden, damit er mit jeder überwundenen Schwierigkeit sich immer höhere Ziele setzt. Die nun folgende Theorie der Collineationsverwandtschaft beschränkt sich auf collinearliegende Figuren und ist der einzige Paragraph, zu dessen Begründung stereometrische Begriffe nicht entbehrt werden konnten; sie ist übrigens einestheils deswegen mitgetheilt worden, damit die Doppelverhältnisse als das bei jeder Projection sich gleich Bleibende erkannt würden und dadurch ihre tiefere Begründung erhielten, anderntheils, weil man in neuerer Zeit auch in die descriptive Geometrie die Methode der neueren Geometrie mit Erfolg übertragen hat, wie dies für die Schule von Scherling in seinen „Anfangsgründen der descriptiven Geometrie", für Fortgeschrittenere in den Lehrbüchern dieser Wissenschaft von Schlesinger und Fiedler geschehen ist. Nach einigen Anwendungen der Collineations- besonders der Aehnlichkeitslehre kommt dann endlich ein Para-

graph über das mit dem Princip der Dualität verwandte Princip der Reciprocität als Abschluß des Ganzen.

Daß ich zur Durchführung meines Planes alle vorhandenen Hülfsmitttel sorgfältig benutzt habe, versteht sich von selbst. Bei wichtigeren Sätzen habe ich die Quellen entweder angeführt oder selbst sprechen lassen; namentlich gilt dies von Jakob Steiner, aus dessen Werken ich Manches wörtlich herübergenommen habe. Das wenige mir Zugehörige wird der Kenner leicht zu finden wissen.

Ich wünsche und hoffe, daß das Büchlein den Beifall meiner Collegen erringen und von ihnen als praktisch befunden werden möge; ich selbst habe es noch als Manuscript einem Cursus zu Grunde gelegt, den ich versuchsweise außerhalb der gewöhnlichen Unterrichtsstunden einer Auswahl von Obersecundanern über diese Disciplin ertheilte, und damit für mich sehr befriedigende Erfolge erzielt, was freilich für die Allgemeinheit nicht maßgebend zu sein braucht. Wohlgemeinte Ausstellungen und Belehrungen von Seite meiner Collegen werde ich mit Dank annehmen und berücksichtigen.

Der Verfasser.

§. 1. Die Regel der Zeichen.

1. Bewegt sich ein Punkt auf einer graden Linie vom Punkte a bis zum Punkte b, so sagt man, er habe die Strecke ab zurückgelegt, bewegt er sich von b nach a, also in der entgegengesetzten Richtung, die Strecke ba. Vollendet er nacheinander beide Bewegungen, so ist er um nichts von seinem anfänglichen Orte weggekommen und es ist so gut, als ob er sich gar nicht bewegt hätte; man kann deshalb in Bezug auf den Endzustand die Summe seiner beiden Bewegungen gleich Null setzen und schreiben:

$$ab + ba = o,$$

woraus folgt

$$ab = - ba.$$

Eine auf einer Graden durchlaufene Strecke verhält sich daher zu der in der entgegensetzten Richtung durchlaufenen wie eine positive Größe zu einer negativen.

2. Bewegt sich eine Grade um einen Punkt aus der Lage a in die Lage b, so sagt man, sie habe den Winkel ab zurückgelegt, bewegt sie sich von b nach a, also in der entgegengesetzten Richtung, den Winkel ba. Vollendet sie nacheinander beide Bewegungen, so ist sie um nichts von ihrem anfänglichen Orte weggekommen und es ist so gut, als ob sie sich gar nicht bewegt hätte; man kann deshalb in Bezug auf den Endzustand die Summe ihrer beiden Bewegungen gleich Null setzen und schreiben:

$$ab + ba = o,$$

woraus folgt

$$ab = - ba.$$

Ein um einen Punkt durchlaufener Winkel verhält sich daher zu dem in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen wie eine positive Größe zu einer negativen.*)

---

*) Die Regel der Zeichen ist zuerst von Kästner aufgestellt, aber erst von Möbius consequent durchgeführt worden, vergl. Gretschel organ. Geometrie, pag. 2 u. 3.

3. Zerlegt man eine Strecke ab durch einen auf ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Punkt c in 2 Segmente ac und cb, von denen das erste vom Anfangspunkt bis zum Theilungspunkt, das zweite von diesem bis zum Endpunkte reicht, so sind hiernach im ersten Falle beide Segmente als positiv zu betrachten, im zweiten Falle das erste als positiv, das zweite als negativ.

4. Analog verhält es sich mit der Theilung eines Winkels.

§. 2. Der Satz des Menelaus.

Erklärung. Wird ein Dreieck von einer Transversale geschnitten, so sind 2 Fälle möglich; entweder nämlich werden alle 3 Seiten in ihren Verlängerungen geschnitten oder nur eine. In ersterem Falle ist nach §. 1, 1 das eine der beiden auf jeder Seite entstehenden Segmente positiv, das andere negativ, im zweiten Falle gilt dies nur von den Segmenten der einen Seite, die der beiden andern sind positiv.

Lehrsatz 1. Wird ein Dreieck von einer Transversale geschnitten, so ist das Produkt der 3 Verhältnisse von je 2 in derselben Ordnung aufeinander folgenden Segmenten der Seiten gleich — 1, so daß, wenn wir in dem Dreieck abc die Schnittpunkte der Seiten bc, ca, ab, welche bezüglich den Winkeln a, b, c gegenüberliegen, mit a′, b′, c′ bezeichnen

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = -1.$$

Erster Fall. Alle 3 Seiten des Dreiecks werden in ihren Verlängerungen geschnitten (Fig. 1.)

Man ziehe von b aus eine Parallele mit der Transversale, so hat man aus der Aehnlichkeit der △△ abd und ac′b′

$$\frac{ab'}{ac'} = \frac{db'}{bc'}$$

und aus der Aehnlichkeit der △△ cb′a′ und cdb

$$\frac{ca'}{a'b} = \frac{cb'}{b'd}$$

Multiplicirt man beide Gleichungen und berücksichtigt, daß $db' = -b'd$ und $cb' = -b'c$ ist, so folgt der Lehrsatz.

Zweiter Fall. Nur eine Seite des Dreiecks wird in ihrer Verlängerung geschnitten (Fig. 2).

Der Beweis wird Wort für Wort in derselben Weise geführt.

Anmerkung. Dieser Satz führt den Namen des Menelaus, eines griechischen Mathematikers aus Alexandria, welcher zur Zeit Trajans in Rom lebte. Derselbe hinterließ 3 Bücher sphaerica, das erste trigonometrische Werk aus dem Alterthum, welches uns aber nicht im Original, sondern in einer nach einer arabischen Uebersetzung veranstalteten Uebersetzung erhalten ist.

Lehrsatz 2. Liegt auf jeder Seite eines Dreiecks ein Punkt dergestalt, daß für diese 3 Punkte die Relation des Menelaus erfüllt ist, so liegen sie auf einer graden Linie.

Sind a', b', c'' diese 3 Punkte, so hat man nach der Voraussetzung

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc''}{b'c \cdot a'b \cdot c''a} = -1.$$

Läge nun der Punkt c'' nicht auf der Verlängerung der Verbindungslinie von a' und b', sondern schnitte die letztere die Seite ab in dem Punkte c', so hätte man nach Lehrsatz 1

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = -1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{bc'}{c'a} = \frac{bc''}{c''a} \text{ oder}$$

$$\frac{bc'}{c'b + ba} = \frac{bc''}{c''b + ba} \text{ oder}$$

$$\frac{bc'}{-bc' + ba} = \frac{bc''}{-bc'' + ba}$$

Daraus erhält man durch Entwicklung, Reduction und Heben

$$bc' = bc''$$

d. h. unter der gemachten Voraussetzung muß der Punkt c'' mit dem Punkte c' zusammenfallen, welcher nach der Construction mit a', b' auf derselben Graden liegt.

§. 3. Der Satz des Ceva.

Erklärung. Die Verbindungslinien eines Punktes in der Ebene eines Dreiecks treffen die gegenüberliegenden Seiten entweder alle drei zwischen ihren Endpunkten oder nur eine davon, je nachdem dieser Punkt innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt. Im ersteren Falle sind nach §. 1, 1 beide auf jeder Seite entstehende Segmente positiv, im zweiten gilt

dies nur von der einen Seite, auf den beiden andern ist je das eine Segment positiv, das andere negativ.

Lehrsatz 1. Schneiden sich die bezüglich von den 3 Ecken eines Dreiecks ausgehenden Transversalen in einem Punkte, so ist das Produkt der Verhältnisse von je 2 in derselben Ordnung aufeinander folgenden Segmenten der Seiten $= + 1$, so daß also, wenn wir in dem Dreieck abc die Schnittpunkte der Seiten bc, ca, ab durch die von a, b, c, ausgehenden Transversalen mit a′, b′, c′ bezeichnen,

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = + 1.$$

Erster Fall. Der Schnittpunkt o der Transversalen liegt innerhalb des Dreiecks. (Fig. 3.)

Man denke sich die Dreiecke aa′b und aa′c bezüglich durch die Transversalen cc′ und bb′ geschnitten und wende auf sie den Menelaus'schen Lehrsatz an, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{ao \cdot a'c \cdot bc'}{oa \cdot cb \cdot c'a.} = - 1.$$

$$\frac{ao \cdot a'b \cdot cb'}{oa' \cdot bc \cdot b'a} = - 1.$$

Durch Division folgt der Lehrsatz, wenn man berücksichtigt, daß $cb = - bc$, $a'c = - ca'$, $cb' = - b'c$.

Zweiter Fall. Der Schnittpunkt o liegt außerhalb des Dreiecks (Fig. 4). Der Beweis wird Wort für Wort in derselben Weise geführt.

Anmerkung. Der Satz hat seinen Namen von dem Jesuiten Ceva (1648 — 1736) geb. zu Mailand, der sich als Dichter und Mathematiker auszeichnete.

Lehrsatz 2. Liegt auf jeder Seite eines Dreiecks ein Punkt dergestalt, daß für diese 3 Punkte die Relation des Ceva erfüllt ist, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken in einem Punkte.

Sind a′, b′, c″ diese 3 Punkte, so hat man nach der Voraussetzung

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc''}{b'c \cdot a'b \cdot c''a} = + 1.$$

Ginge nun cc″ nicht durch den Schnittpunkt von aa′ und bb′, sondern träfe die Verbindungslinie dieses Schnittpunkts mit c die Seite ab in dem Punkte c′, so hätte man nach Lehrsatz 1

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = + 1$$

und aus diesen beiden Gleichungen auf die nämliche Weise, wie bei dem Menelaus'schen Satze

$$bc' = bc''$$

d. h. unter der gemachten Voraussetzung muß der Punkt c'' mit dem Punkte c' zusammenfallen, welcher nach der Construction auf der Verbindungslinie des Schnittpunkts von aa' und bb' mit c liegt.

§. 4. Anwendungen des Menelaus'schen und Ceva'schen Lehrsatzes.

Lehrsätze 1—4. Die Schwerlinien, die Höhen, die Winkelhalbirenden und die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises schneiden sich in je einem Punkte.

Nennt man die Schnittpunkte der von den Ecken ausgehenden Transversalen mit den diesen Ecken bezüglich gegenüberliegenden Seiten a' b' c', so muß nach §. 3, 2 für alle 4 Fälle

$$\frac{ab' \,.\, ca' \,.\, bc'}{b'c \,.\, a'b \,.\, c'a} \text{ identisch gleich } + 1 \text{ sein. (Fig. 3.)}$$

Nun ist aber für die Schwerlinien

$$ab' = b'c,\ ca' = a'b,\ bc' = c'a \text{ und daher}$$

$$\frac{ab' \,.\, ca' \,.\, bc'}{b'c \,.\, a'b \,.\, c'a} = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \equiv + 1;$$

für die Winkelhalbirenden hat man:

$$\frac{ab'}{b'c} = \frac{ba}{cb},\ \frac{ca'}{a'b} = \frac{ac}{ba},\ \frac{bc'}{c'a} = \frac{cb}{ac}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man wieder die verlangte Identität.

Für die Höhen ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ab'b und ac'c, cb'b und ca'a, ba'a und bc'c:

$$\frac{ab'}{c'a} = \frac{bb'}{cc'},\ \frac{ca'}{b'c} = \frac{aa'}{bb'},\ \frac{bc'}{a'b} = \frac{cc'}{aa'}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man wieder die verlangte Identität.

Für die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten ist $ab' = c'a$, $b'c = ca'$, $a'b = bc'$ und daher unmittelbar die Identität erfüllt.

Der letzte Satz hat ein Gegenstück in folgendem:

Lehrsatz 5. Beschreibt man um ein Dreieck einen Kreis und legt in jedem Eckpunkte an denselben eine Tangente, so liegen die Schnittpunkte dieser Tangenten mit den gegenüberliegenden Seiten in einer graden Linie. (Fig. 5.)

Erster Beweis. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke abb' und cbb', baa' und caa', bcc' und acc' ist:

$$\frac{ab'}{ab} = + \frac{bb'}{bc} \text{ und } \frac{b'c}{bc} = - \frac{bb'}{ab'}$$

$$\frac{ca'}{ca} = + \frac{aa'}{ab} \text{ und } \frac{a'b}{ab} = - \frac{aa'}{ca}$$

$$\frac{bc'}{bc} = + \frac{cc'}{ca} \text{ und } \frac{c'a}{ca} = - \frac{cc'}{bc}$$

Dividirt man von je 2 nebeneinanderstehenden Gleichungen immer die erste durch die zweite, so erhält man:

$$\frac{ab'}{b'c} = - \frac{ab^2}{bc^2}, \quad \frac{ca'}{a'b} = - \frac{ca^2}{ab^2}, \quad \frac{bc'}{c'a} = - \frac{bc^2}{ca^2}$$

und durch Multiplication dieser 3 letzten Gleichungen:

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = -1$$

also liegen nach §. 2, 2 die Punkte a', b', c' auf einer graden Linie.

Zweiter Beweis. In dem umschriebenen Dreieck A, B, C ist nach dem vorigen Satze

$$\frac{Ab \cdot Ca \cdot Bc}{bC \cdot aB \cdot cA} = +1.$$

Läßt man dieses Dreieck nacheinander durch die Transversalen ab, bc, ca schneiden, so gibt der Menelaus'sche Lehrsatz:

$$\frac{Ab \cdot Ca \cdot Bc'}{bC \cdot aB \cdot c'A} = -1$$

$$\frac{Ab \cdot Ca' \cdot Bc}{bC \cdot a'B \cdot cA} = -1$$

$$\frac{Ab' \cdot Ca \cdot Bc}{b'C \cdot aB \cdot cA} = -1.$$

Multiplicirt man die 3 letzten Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{Ab^2 \cdot Ca^2 \cdot Bc^2}{bC^2 \cdot aB^2 \cdot cA^2} \cdot \frac{Ab' \cdot Ca' \cdot Bc'}{b'C \cdot a'B \cdot c'A} = -1$$

und mit Hülfe der ersten:

$$\frac{Ab' \cdot Ca' \cdot Bc'}{b'C \cdot a'B \cdot c'A} = -1$$

woraus wiederum folgt, daß a', b', c' auf einer Graden liegen.

Lehrsatz 6. Die Hülfslinien zum Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes schneiden sich in einem Punkte. (Fig. 6.)

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke b'cg und bab' folgt:

$$\frac{ab'}{b'c} = \frac{ba}{cg} = \frac{ba}{ac} \quad (1)$$

ebenso aus der Aehnlichkeit der Dreiecke c'bd und c'ac:

$$\frac{bc'}{c'a} = \frac{db}{ac} = \frac{ba}{ac} \quad (2)$$

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck abc:
$ba^2 = ba' \cdot bc$ und $ac^2 = ca' \cdot cb$, folglich

$$\frac{ca'}{a'b} = \frac{ac^2}{ab^2} \qquad (3)$$

Die Multiplication von 1, 2 und 3 gibt das Verlangte.

Lehrsatz 7. Fällt man von einem Punkte d in der Peripherie eines Kreises Senkrechten auf die Seiten eines in denselben beschriebenen Dreiecks abc, so liegen die Fußpunkte a′, b′, c′ derselben in grader Linie. (Fig. 7.)

Beweis. Man verbinde den Punkt d mit den 3 Ecken a, b, c des Dreiecks abc; dann entstehen 3 Paare ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke, nämlich dab′ und da′b, dbc′ und db′c, dca′ und dc′a, woraus sich die Proportionen ergeben:

$$\frac{ab'}{a'b} = -\frac{db'}{da'}, \quad \frac{ca'}{c'a} = -\frac{da'}{dc'}, \quad \frac{bc'}{b'c} = -\frac{dc'}{db'}$$

Durch Multiplication derselben erhält man:

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc'}{b'c \cdot a'b \cdot c'a} = -1$$

also liegen nach dem Menelaus'schen Satze a′, b′, c′ in grader Linie.

Lehrsatz 8. Wenn die Verbindungslinien von je 2 Eckpunkten zweier Dreiecke in einem Punkte sich schneiden, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in grader Linie. (Fig. 8.)

Wendet man auf die Dreiecke oab, ocb, oca hintereinander den Menelaus'schen Lehrsatz an, indem man sie bezüglich durch die Transversalen a′b′, c′b′, c′a′ schneiden läßt, so erhält man die 3 Relationen:

$$\frac{ac'' \cdot bb' \cdot oa'}{c''b \cdot b'o \cdot a'a} = -1, \quad \frac{ba'' \cdot cc' \cdot ob'}{a''c \cdot c'o \cdot b'b} = -1,$$

$$\frac{cb'' \cdot aa' \cdot oc'}{b''a \cdot a'o \cdot c'c} = -1,$$

durch deren Multiplication, wenn man noch auf die Zeichen Rücksicht nimmt, entsteht:

$$\frac{ac'' \cdot ba'' \cdot cb''}{c''b \cdot a''c \cdot b''a} = -1,$$

womit der Satz btwiesen ist nach Lehrsatz 2 des §. 2.

Lehrsatz 9. Wenn die Schnittpunkte von je 2 Seiten zweier Dreiseite auf einer graden Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte. (Fig. 8.)

Nennt man o den Schnittpunkt von aa′ und bb′, so wäre zu beweisen, daß o, c und c′ in grader Linie liegen. Nun schneiden sich aber die Ver-

bindungslinien der Eckpunkte der Dreiecke aa'b" und bb'a" im Punkte c", daher liegen die Schnittpunkte ihrer Gegenseiten o, c, c' in grader Linie nach dem vorigen Lehrsatze.

Anmerkung zu den beiden vorhergehenden Lehrsätzen. Wenn Dreiecke eine solche Lage haben, wie sie in diesen Lehrsätzen beschrieben ist, so sagt man, sie lägen collinear oder perspectivisch, der Punkt o heißt das Collineationscentrum und die Grade a"b"c" die Collineationsaxe. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Collineationsaxe mit den Strahlen oaa', obb', occ' durch α, β, γ, so erhält man durch Anwendung des Menelaus'schen Satzes auf das Dreieck $o\beta\gamma$, wenn man es nacheinander durch die Transversalen bc und b'c' geschnitten denkt:

$$\frac{ob \, . \, \beta\alpha \, . \, \gamma c}{b\beta \, . \, \alpha\gamma \, . \, co} = -1 \qquad \frac{ob' \, . \, \beta\alpha \, . \, \gamma c'}{b'\beta \, . \, \alpha\gamma \, . \, c'o} = -1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unter Berücksichtigung der Zeichen

$$\frac{bo}{ob'} : \frac{b\beta}{\beta b'} = \frac{co}{oc'} : \frac{c\gamma}{\gamma c'}$$

und da man in der nämlichen Weise erhalten kann

$$\frac{co}{oc'} : \frac{c\gamma}{\gamma c'} = \frac{ao}{oa'} : \frac{a\alpha}{\alpha a'}$$

so sind die 3 Doppelverhältnisse

$$\frac{ao}{oa'} : \frac{a\alpha}{\alpha a'}, \quad \frac{bo}{ob'} : \frac{b\beta}{\beta b'}, \quad \frac{co}{oc'} : \frac{c\gamma}{\gamma c'}$$

einander gleich.

Bezeichnet man mit A und A', B und B', C und C' die Schnittpunkte der Seiten bc und b'c', ca und c'a', ab und a'b' mit den Strahlen oaa', obb', occ', so findet man in ähnlicher Weise die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$\frac{Ao}{oA'} : \frac{A\alpha}{\alpha A'}, \quad \frac{Bo}{oB'} : \frac{B\beta}{\beta B'}, \quad \frac{Co}{oC'} : \frac{C\gamma}{\gamma C'}$$

Diese Gleichheit von Doppelverhältnissen werden wir später zur Grundlage allgemeiner Betrachtungen über den nämlichen Gegenstand machen.

Lehrsatz 10. Trägt man in dem Dreieck abc ab auf ac und ac auf ab von a aus auf, construirt das Parallelogramm $a\gamma A\beta$, in welchem $a\gamma = ac$ und $a\beta = ab$ und zieht die Diagonale aA, verfährt man ferner analog mit je 2 anderen Seiten, so schneiden sich die 3 so gefundenen Diagonalen in einem Punkte. (Fig. 9.)

Beweis. Fällt man von dem Schnittpunkte a' der Diagonale aA mit der Seite bc die Senkrechten p und q und von A aus die Senkrechten p' und q' auf ab und ac, so hat man einerseits

$$\frac{\triangle aba'}{\triangle aa'c} = \frac{ba'}{a'c} \text{ und andrerseits}$$

$$\frac{\triangle aba'}{\triangle aa'c} = \frac{ab \cdot p}{ca \cdot q} = \frac{ab \cdot p'}{ca \cdot q'} = \frac{ab \cdot A\gamma}{ca \cdot \beta A} = \frac{ab \cdot a\beta}{ca \cdot \gamma a} =$$

$$\frac{ab \cdot ba}{ca \cdot ac} = \frac{ba^2}{ac^2}$$

Man erhält daher

$$\frac{ba'}{a'c} = \frac{ba^2}{ac^2}$$

und durch Vertauschung der Buchstaben

$$\frac{cb'}{b'a} = \frac{cb^2}{ba^2}$$

$$\frac{ac'}{c'b} = \frac{ac^2}{cb^2}$$

woraus durch Multiplication folgt:

$$\frac{ba' \cdot cb' \cdot ac'}{a'c \cdot b'a \cdot c'b} = +1.$$

Einen anderen Beweis erhält man in folgender Art: Zieht man von c aus eine Parallele mit ab, bis γA in e und aA in f geschnitten wird, so hat man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $aA\beta$ und afc.

$$\frac{a\beta}{\beta A} = \frac{ac}{cf} \quad \text{oder} \quad \frac{ab}{ac} = \frac{ac}{cf} \qquad (1)$$

Ferner gibt die Aehnlichkeit der Dreiecke aa'b und a'cf:

$$\frac{ba'}{a'c} = \frac{ab}{cf} \qquad (2)$$

Setzt man den Werth von cf aus (1) in (2) ein, so kommt wie oben

$$\frac{ba'}{a'c} = \frac{ba^2}{ac^2}$$

Anmerkung. Der Schnittpunkt der 3 Diagonalen besitzt die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Dreiecksseiten ein Minimum ausmacht. Vgl. Ztschr. f. Math. u. Phys. XVI, 168 und XII, 281.

Lehrsatz 11. Schneidet man von den nöthigenfalls über a verlängerten Seiten ba und ca eines Dreiecks abc die Stücke be und cd = bc ab, verbindet den Schnittpunkt f von bd und ce mit a durch eine Grade, welche bc in a' trifft und verschafft sich durch das entsprechende Verfahren auf ca und ab die Punkte b' und c', so liegen die 3 Punkte a', b', c' auf einer Graden. (Fig. 10.)

Wendet man auf das Dreieck abc, von dessen Ecken die Transversalen af, bf, cf ausgehen, den Ceva'schen Satz an, so ist:

$$\frac{ba' \cdot cd \cdot ae}{a'c \cdot da \cdot eb} = +1$$

oder, wenn man das Verhältniß $\frac{ba'}{a'c}$ mit m bezeichnet und die übrigen Linien durch die Seiten des Dreiecks ausdrückt:

$$m \cdot \frac{a}{(a - b)} \cdot \frac{(a - c)}{a} = + 1$$

woraus
$$m = \frac{a - b}{a - c}$$

Bildet man ebenso die Verhältnisse m' und m'' auf den Seiten ca und ab, was durch Vertauschung der Buchstaben geschehen kann, so erhält man:

$$m' = \frac{b - c}{b - a}, \quad m'' = \frac{c - a}{c - b}$$

und durch Multiplication der 3 letzten Gleichungen die Identität

$$m \cdot m' \cdot m'' = - 1.$$

Anmerkung. Dieser Satz ist von C. W. Baur in der Ztschr. f. Math. u. Phys. XII, 354 ohne Beweis mitgetheilt worden; Schubert hat a. a. O. XVI, 83 Erweiterungen nebst Beweis gegeben, von denen wir im folgenden Lehrsatz eine mittheilen. Die Grade, auf welcher die Punkte a', b', c' liegen, ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkt der 2 einander berührenden Kreise, von denen der eine in das Dreieck, der andere durch die Mitten der 3 Seiten beschrieben wird.

Lehrsatz 12. Schneidet man auf den Verlängerungen der Seiten ab und ac eines Dreiecks abc die Stücke bc und cd = bc ab, verbindet den Schnittpunkt f von bd und ce mit a durch eine Grade, welche bc in a' trifft; nimmt man ferner auf die Verlängerung von bc' bd = ca und auf ab ae' = ca, verbindet den Schnittpunkt f von ce' und ad' mit b durch eine Grade, welche ac in b' trifft; nimmt man endlich auf der Verlängerung von cb bd'' = ab und auf ca ae'' = ba, verbindet den Schnittpunkt f'' von be'' und ad'' mit c durch eine Grade, welche ab in c' trifft: so liegen die 3 Punkte a', b', c' in grader Linie. (Fig. 11.)

Wendet man auf das Dreieck abc dreimal hintereinander den Ceva'schen Satz an, indem man nacheinander die Punkte f, f' f'' als Schnittpunkte der von den Ecken ausgehenden Transversalen betrachtet, so erhält man die 3 Gleichungen

$$\frac{ba' \cdot cd \cdot ae}{a'c \cdot da \cdot eb} = + 1$$

$$\frac{cb' \cdot ae' \cdot bd'}{b'a \cdot c'b \cdot d'c} = + 1$$

$$\frac{ac' \cdot bd'' \cdot ce''}{c'b \cdot d''c \cdot c''a} = + 1$$

oder, wenn man die Verhältnisse $\frac{ba'}{a'c}$, $\frac{cb'}{b'a}$, $\frac{ac'}{c'b}$ mit m, m', m'' bezeichnet, die übrigen Linien durch die Seiten des Dreiecks ausdrückt und wohl Rücksicht nimmt auf die Zeichen

$$m \cdot \frac{-a \cdot (a+c)}{(a+b) \cdot -a} = +1, \quad m' \cdot \frac{b \cdot (a+b)}{-(b-c) \cdot -b} = +1,$$

$$m'' \cdot \frac{-c \cdot (b-c)}{(a+c) \cdot c} = +1$$

woraus folgt:

$$m = \frac{a+b}{a+c}, \quad m' = \frac{b-c}{a+b}, \quad m'' = -\frac{a+c}{b-c}$$

und durch Multiplication dieser 3 Gleichungen:

$$m \cdot m' \cdot m'' = -1.$$

Anmerkung. Die Grade, auf welcher die Punkte a', b', c' liegen, ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkt der 2 einander berührenden Kreise, von denen der eine der äußere Berührungskreis des Dreiecks abc für die Seite bc ist, der andere durch die Mitten der 3 Seiten geht. Vergl. Schubert a. a. O.

Zur Uebung möge der Anfänger folgende Sätze beweisen:

1. Schneiden sich die von den Ecken eines Dreiecks ausgehenden Transversalen in einem Punkte und man verwechselt die durch sie auf den Seiten bestimmten Segmente, so schneiden sich die von den neuen Theilpunkten nach den Ecken gezogenen Transversalen in einem Punkte.

2. Liegen die auf den Seiten eines Dreiecks liegenden Punkte auf einer Graden und man verwechselt die durch sie auf den Seiten bestimmten Segmente, so liegen die neuen Theilpunkte wieder auf einer Graden.

3. Verbindet man die in dem Lehrsatze 9 dieses Paragraphen erwähnten Punkte d und e durch eine Grade, welche die Seite bc in einem Punkte a' trifft, verbindet a mit a und verschafft sich durch das entsprechende Verfahren die Graden bb' und cc', so schneiden sich diese 3 Graden in einem Punkte.

4. Verbindet man in ähnlicher Weise die Punkte d und e, d' und e', d'' und e'' des Lehrsatzes 10 durch Graden, welche die Seiten bc, ca und ab in den Punkten a', b', c' treffen und verbindet a mit a', b mit b', c mit c' durch die Graden aa', bb', cc', so schneiden sich dieselben in einem Punkte.

5. Schneidet man auf den Verlängerungen der Seiten ab und ac eines Dreiecks abc von b und c aus die Stücke be und cd = bc ab, verbindet den Schnittpunkt f von bd und ce mit a durch eine Grade, welche bc in a' trifft, und verschafft sich durch das entsprechende Verfahren die Graden bb' und cc', so schneiden diese 3 Graden sich in einem Punkte.

6. Die Schnittpunkte der Linien de der vorigen Aufgabe mit den Gegenseiten liegen in grader Linie. Die Linien de selber sind die äußeren

Entfernungsörter des Dreiecks. Vgl. Gandtner und Junghans II, 25. L. 75.

7. Schneidet man auf den Verlängerungen der Seiten ab und ac eines Dreiecks von a aus die Stücke ae und ad = bc ab, verbindet den Schnittpunkt f von bd und ce mit a durch eine Grade, welche bc in a′ trifft und verschafft sich durch das entsprechende Verfahren die Punkte b′, c′, so liegen diese 3 Punkte auf einer Graden.

8. Wenn man die Schnittpunkte der Linien de der vorigen Aufgabe mit den Gegenseiten mit den Gegenecken verbindet, so entstehen 3 Linien, die sich in einem Punkte schneiden.

9. Schneidet man auf den Verlängerungen die Seiten ba und ca eines Dreiecks von a aus die Stücke ae und ad = bc ab, verbindet den Schnittpunkt f von bd und ce mit a durch eine Grade, welche bc in a′ trifft, verbindet a mit a′ durch eine Grade und verschafft sich durch das entsprechende Verfahren die Graden bb′ und cc′, so schneiden sich diese 3 Graden in einem Punkte.

10. Die Schnittpunkte der Linien de der vorigen Aufgabe mit den Gegenseiten liegen in grader Linie.

§. 5. Von der harmonischen Theilung einer Strecke.

Erklärung. Eine Strecke aa′ heißt durch die Punkte b und b′ harmonisch getheilt, wenn die Proportion stattfindet

$$\frac{ab}{ba'} = -\frac{ab'}{b'a'} \qquad (1)$$

Da man dieselbe auch so schreiben kann

$$\frac{b'a'}{a'b} = -\frac{b'a}{ab},$$

so folgt, daß, wenn die Strecke aa′ durch die Punkte b, b′ harmonisch getheilt ist, auch die Strecke bb′ durch die Punkte a, a′ harmonisch getheilt wird. Die Punkte b, b′ nennt man in Bezug auf die durch sie harmonisch getheilte Strecke aa′ einander conjugirt, ebenso sind a, a′ in Bezug auf bb′ einander conjugirt. Hat einer der conjugirten Punkte eine bestimmte Lage, so ist damit auch die des zweiten eindeutig bestimmt, d. h. es gibt nur einen conjugirten Punkt zu einem gegebenen; denn man findet ihn nach dem Obigen durch eine Gleichung des ersten Grades.

Die harmonische Relation kann nun aber noch verschiedene merkwürdige Formen annehmen.

Setzt man ba′ = aa′ — ab und b′a′ = — (ab′ — aa′), so geht Gleichung (1) über in

$$\frac{ab}{aa' - ab} = \frac{ab'}{ab' - aa'} \text{ oder}$$

$$ab \, . \, ab' - ab \, . \, aa' = ab' \, . \, aa' - ab \, . \, ab' \text{ oder}$$

$$2ab \, . \, ab' = ab \, . \, aa' + ab' \, . \, aa' \text{ oder}$$

$$\frac{1}{aa'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab'}\right) \quad (2)$$

d. h. der reciproke Werth der harmonisch getheilten Strecke ist das arithmetische Mittel zwischen den reciproken Werthen der Entfernungen der Theilungspunkte vom Anfangspunkte der Strecke.

Es versteht sich, daß ebenso die Gleichung gilt:

$$\frac{1}{b'b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b'a'} + \frac{1}{b'a}\right)$$

Bezeichnet o den Mittelpunkt der Strecke aa', so geht (1) über in

$$\frac{ao + ob}{oa' - ob} = - \frac{ao + ob'}{oa' - ob'} \quad \text{oder, da } ao = oa'$$

$$\frac{oa' + ob}{oa' - ob} = - \frac{oa' + ob'}{oa' - ob'}, \text{ woraus}$$

$$oa'^2 = ob \, . \, ob' \quad (3)$$

d. h. die Hälfte der harmonisch getheilten Strecke ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Entfernungen der Theilpunkte vom Mittelpunkte der Strecke.

Es ist ferner nach (1):

$$\frac{ab^2}{ab'^2} = - \frac{ab}{ab'} \cdot \frac{ba'}{b'a'}$$

$$= - \frac{(oa' + ob)(oa' - ob)}{(oa' + ob')(oa' - ob')}$$

$$= \frac{oa'^2 - ob^2}{ob'^2 - oa'^2},$$

woraus mit Hülfe von (3) folgt:

$$\frac{ab^2}{ab'^2} = \frac{ob \, . \, ob' - ob^2}{ob'^2 - ob \, . \, ob'}$$

$$= \frac{ob\,(ob' - ob)}{ob'\,(ob' - ob)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{ab^2}{ab'^2} = \frac{ob}{ob'} \quad (4)$$

und da $\frac{ab}{ab'} = - \frac{ba'}{b'a'}$ ist, auch

$$\frac{ba'^2}{b'a'^2} = \frac{ob}{ob'} \quad (4a)$$

d. h. die Entfernungen der Theilpunkte vom Mittelpunkte der Strecke verhalten sich, wie die Quadrate der Entfernungen derselben von einem Endpunkte der Strecke.

Aus den Formen (3) und (4) ergibt sich ohne Weiteres, daß die conjugirten Punkte b und b' immer auf derselben Seite von o liegen müssen,

d. h. daß ob und ob' immer zugleich positiv oder negativ sein müssen. Ferner folgt wenn $ob = oa'$ auch $ob' = oa'$; wird $ob < oa'$, so wird $ob' > oa'$; ist $ob = o$, so ist $ob' = \infty$; wird ob negativ, d. h. liegt es nach der entgegengesetzten Richtung von o hin, so wird auch ob' negativ und liegt in der nämlichen Richtung; nähert sich b dem Punkte a, so nähert sich auch b' demselben, aber von der entgegengesetzten Richtung her.

Zusatz. Da zu einem Theilpunkte einer Strecke immer nur ein ihm conjugirter gehört, so ist auch der Punkt, der zu dem Mittelpunkte der Strecke conjugirt ist, d. h. der unendlich weit entfernte nur ein einziger und man hat deshalb das Recht zu behaupten, auf einer Graden befinde sich nur ein unendlich weit entfernter Punkt. Man kann sich dieses scheinbare Paradoxon auf folgende Weise versinnlichen. Auf einem Kreise denke man sich zwei diametral gegenüberliegende Punkte. Diese werden weiter von einander entfernt sein, als irgend ein anderer Punkt desselben Kreises von einem von ihnen; dies wird auch dann noch wahr bleiben, wenn man sich den Radius des Kreises bis ins Unendliche wachsend denkt und dabei den einen der erwähnten Punkte festhält. Dann geht aber der Kreis in eine grade Linie und der zweite Punkt in den unendlich entfernten Punkt derselben über.

Da nur die grade Linie von einer Graden in einem Punkte geschnitten wird, alle übrigen Linien aber mit ihr mehrere Schnittpunkte haben, so folgt aus der obigen Bemerkung, daß alle unendlich weit entfernten Punkte einer Ebene auf einer Graden liegen. Denn lägen sie auf einer andern Curve, so müßte jede in der Ebene gezogene Grade mit ihr mehr als einen unendlich weit entfernten Schnittpunkt haben, was nach dem Vorstehenden unmöglich ist.

Aufgabe 1. Es ist eine Strecke aa' und auf derselben ein Punkt b gegeben; man soll den dazu conjugirten Punkt b' finden.

Erster Fall. Der Punkt b liegt innerhalb der Strecke aa' (Fig. 12.)

Man beschreibe über der Strecke aa' als Durchmesser einen Kreis, errichte in b eine Senkrechte auf aa', die den Kreis in d schneidet und lege in d eine Tangente an denselben; diese wird die Verlängerung von aa' in dem gesuchten Punkte b' schneiden. Denn es ist

$$od^2 = ob \cdot ob'$$

oder da $od = oa'$ ist

$$oa'^2 = ob \cdot ob'$$

Zweiter Fall. Der Punkt b liegt auf der Verlängerung der Strecke aa'.

Man beschreibe grade wie vorher über der Strecke aa' als Durchmesser einen Kreis, ziehe von b aus eine Tangente an denselben und fälle von ihrem Berührungspunkte eine Senkrechte auf aa'; ihr Fußpunkt ist der gesuchte Punkt. Beweis wie im ersten Falle.

Anmerkung. Wir werden bald Mittel kennen lernen, auch ohne Hülfe des Cirkels, blos mit dem Lineal den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Zusatz. Beschreibt man vom Punkte b' (Fig. 13) aus mit der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente b'd als Halbmesser einen zweiten Kreis, so schneidet derselbe den ersten rechtwinkig und man hat noch die Gleichung

$$od^2 = oe \cdot oe'$$

Legt man nun durch o einen zweiten Durchmesser cc', der den zweiten Kreis in den Punkten f und f' schneidet, so geht obige Gleichung, weil od = oc und oe . oe' = of . of' ist, über in:

$$oc'^2 = of \cdot of'$$

woraus sich der von Poncelet gefundene Satz ergibt:

Schneiden sich 2 Kreise rechtwinklig, so wird jeder Durchmesser des einen von der Peripherie des andern harmonisch getheilt.

Aufgabe 2. Man soll die Strecke a'b so in die Strecke ab' einlegen, daß ab durch die Punkte a', b' harmonisch getheilt wird.

Bezeichnet man ab' mit α, a'b mit β, aa' mit x und bb' mit y, so muß nach (1)

$$\frac{x}{\beta} = \frac{x}{y} \text{ oder } xy = \alpha\beta;$$

ferner ist

$$x + y = \alpha - \beta.$$

x und y sind also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - (\alpha - \beta) z + \alpha\beta = 0.$$

Construiren lassen sich die Werthe von x und y folgendermaßen (Fig. 13).

Man beschreibe über AB = $\alpha + \beta$ als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben eine Sehne von der Länge $\alpha - \beta$ ein und beschreibe einen dem ersten concentrischen Kreis, der diese Sehne berührt. Hierauf trage man von A aus auf AB die Strecke AC = β auf und lege von C aus an den zweiten Kreis eine Tangente, so sind die Segmente, in welche diese durch den ersten Kreis und den Punkt C getheilt wird, die verlangten Strecken x und y.

Hieraus ergibt sich zugleich die Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe. Bezeichnet man nämlich den Halbmesser des zweiten Kreises mit r, so muß $r < \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta$ d. h. $< \frac{\alpha - \beta}{2}$ sein, wenn die Tangente zu legen möglich sein soll; nun ist aber $r^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} = \alpha\beta$, daher muß $\alpha\beta =< \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}$ sein. In der That ist $\frac{(\alpha - \beta)^2}{4} - \alpha\beta$

die Discriminante obiger quadratischer Gleichung, deren Negativwerden anzeigt, daß x und y imaginär sind. Den größten Werth, den β im Verhältniß zu α annehmen kann, erhält man aus der Gleichung $\alpha\beta = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}$; man bekommt $\beta = 0{,}18\,\alpha$; in diesem Falle fällt der Mittelpunkt der Strecke β mit dem Mittelpunkte der Strecke α zusammen.

§. 6. Das harmonische Strahlenbüschel.

Erklärung. Verbindet man irgend einen Punkt in der Ebene mit vier auf einer Graden in derselben Ebene harmonisch liegenden Punkten (einer harmonischen Punktreihe) durch vier grade Linien, so bilden diese ein harmonisches Strahlenbüschel; jede einzelne der dazu gehörigen Graden heißt Strahl und ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt Scheitel.

Lehrsatz 1. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von einer beliebigen Transversale in einer harmonischen Punktreihe geschnitten. (Fig. 15.)

Vorausgesetzt ist

$$\frac{ac}{cb} = -\frac{ad}{db} \text{ oder } \frac{ac}{cb} = \frac{ad}{bd}$$

Fällt man von f aus die Perpendikel p und p' bezüglich auf acbd und a'c'b'd' und multiplicirt in beiden Verhältnissen obiger Proportion Zähler und Nenner mit $\frac{1}{2}$p, so geht dieselbe über in

$$\frac{\triangle fac}{\triangle fcb} = \frac{\triangle fad}{\triangle fbd} \qquad (1)$$

Nun ist aber

$$\frac{\triangle fac}{\triangle fa'c'} = \frac{fa\,.\,fc}{fa'\,.\,fc'} \text{ und } \frac{\triangle fcb}{\triangle fc'b'} = \frac{fc\,.\,fb}{fc'\,.\,fb'},$$

weil Dreiecke, die einen Winkel gemeinsam haben, in Bezug auf ihren Flächeninhalt sich verhalten wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten. Durch Division der beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$\frac{\triangle fac}{\triangle fcb} = \frac{\triangle fa'c'}{\triangle fc'b'} \cdot \frac{fa\,.\,fb'}{fa'\,.\,fb} \qquad (2)$$

Ebenso ist

$$\frac{\triangle fad}{\triangle fa'd'} = \frac{fa\,.\,fd}{fa'\,.\,fd'} \text{ und } \frac{\triangle fbd}{\triangle fb'd'} = \frac{fb\,.\,fd}{fb'\,.\,fd'} \text{ und daher}$$

$$\frac{\triangle fad}{\triangle fbd} = \frac{\triangle fa'd'}{\triangle fb'd'} \cdot \frac{fa\,.\,fb'}{fa'\,.\,fb} \qquad (3)$$

In Folge von (1) sind die rechten Seiten von (2) und (3) einander gleich und man muß deshalb setzen

$$\frac{\triangle fa'c'}{\triangle fc'b'} = \frac{\triangle fa'd'}{\triangle fb'd'} \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{1}{2}p' \cdot a'c'}{\frac{1}{2}p' \cdot c'b'} = \frac{\frac{1}{2}p' \cdot a'd'}{\frac{1}{2}p' \cdot b'd'}$$

$$\text{d. h. } \frac{a'c'}{c'b'} = \frac{a'd'}{b'd'} \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz 1. Zieht man eine Transversale parallel mit einem Strahl des harmonischen Büschels, so theilt der Durchschnittspunkt des conjugirten Strahls mit der Transversale die Entfernung der Durchschnittspunkte der beiden anderen Strahlen in 2 gleiche Theile. Denn alsdann liegt einer der conjugirten Punkte auf der Transversale im Unendlichen, also sein conjugirter Punkt in der Mitte zwischen den 2 anderen nach §. 5.

Zusatz 2. Wird eine Transversale durch drei Strahlen eines harmonischen Büschels in 2 gleiche Theile getheilt, so ist sie dem vierten Strahl parallel. Denn da die Transversale durch das Büschel in einer harmonischen Punktreihe geschnitten wird, der conjugirte Punkt zu dem Mittelpunkt der Strecke aber im Unendlichen liegt nach §. 5, so muß der vierte Strahl des Büschels durch diesen Punkt gehen oder der Transversale parallel sein.

Zusatz 3. Verbindet man umgekehrt einen Punkt in der Ebene mit den Endpunkten einer Strecke und ihrer Mitte und zieht von ihm aus eine Parallele mit der Strecke, so bilden diese 4 Linien ein harmonisches Büschel. Denn wäre dem nicht so, so könnte der letzterwähnte Strahl die Strecke auch nicht in dem conjugirten Punkt zum Mittelpunkt der Strecke d. h. im Unendlichen treffen und folglich nicht mit der Strecke parallel sein.

Lehrsatz 2. Die Schenkel eines Winkels und die Halbirungslinien desselben und seines Nebenwinkels bilden ein harmonisches Büschel (Fig. 16).

Als bekannt wird vorausgesetzt, daß die Halbirungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels senkrecht aufeinander stehen. Sind also afb der gegebene Winkel und fc und fd die erwähnten Halbirungslinien, so ziehe man eine Parallele mit fd, welche die Strahlen fa, fc und fb in den Punkten a′, c, b′ schneidet. Diese steht senkrecht auf fc, weil fd darauf senkrecht steht, deshalb sind die beiden Dreiecke fa′c und fcb′ congruent und a′c = cb′. Daraus folgt nach Zusatz 3 des vorigen Lehrsatzes die Behauptung.

Zusatz. Umkehrung 1. In jedem harmonischen Büschel, in welchem der Winkel zwischen 2 Strahlen durch den dritten halbirt wird, steht der vierte senkrecht auf dem dritten. Denn errichtet man auf dem dritten Strahl eine Senkrechte, so wird diese von dem Büschel in einer harmonischen Punktreihe geschnitten, außerdem sind aber die Dreiecke fa'c und fcb' congruent, daher a'c = cb' oder einer der 4 Punkte liegt in der Mitte zwischen 2 andern, daher muß der 4. in unendlicher Entfernung liegen nach §. 5. Da nun der vierte Strahl durch diesen unendlich fernen Punkt der Transversale geht, so ist er mit ihr parallel und also auch senkrecht auf dem dritten Strahl.

Umkehrung 2. Wenn in einem harmonischen Strahlenbüschel zwei Strahlen senkrecht aufeinander stehen, so halbiren sie den Winkel und Nebenwinkel der beiden andern. Denn errichtet man auf einem der aufeinander senkrecht stehenden Strahlen eine Senkrechte, so wird diese durch das Büschel in einer harmonischen Punktreihe geschnitten und ist parallel mit dem andern Strahl; daher ist nach Zusatz 1 des vorigen Lehrsatzes a'c = cb' und daher sind die Dreiecke fa'c und fcb' congruent, woraus ∢ a'fc = ∢ cfb' folgt.

§. 7. Die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits und vollständigen Vierecks.

Erklärung 1. Vier grade Linien in einer Ebene bilden ein vollständiges Vierseit; jede dieser Linien heißt eine Seite desselben, die Schnittpunkte der Seiten heißen Ecken; das vollständige Vierseit hat also vier Seiten und sechs Ecken. Verbindet man je 2 Ecken, die noch nicht durch Seiten verbunden sind, so erhält man die drei Diagonalen des Vierseits, ihre Durchschnittspunkte miteinander heißen Diagonalpunkte. Jede Diagonale enthält zwei Eckpunkte und zwei Diagonalpunkte.

Lehrsatz 1. Je zwei auf einer Diagonale liegenden Diagonalpunkten eines vollständigen Vierseits sind zu den 2 auf derselben Diagonale liegenden Ecken conjugirte harmonische Punkte. (Fig. 17).

Man denke sich das Dreieck aec durch die Transversale bd geschnitten und wende den Satz des Menelaus an, so ist

$$\frac{aA \,.\, cd \,.\, eb}{Ac \,.\, de \,.\, ba} = -1.$$

Nach dem Satze des Ceva, angewandt auf das nämliche Dreieck, ist aber:

$$\frac{aB \,.\, cd \,.\, eb}{Bc \,.\, de \,.\, ba} = + 1$$

Durch Division beider Relationen erhält man

$$\frac{aA}{Ac} = - \frac{aB}{Bc}$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Für die zweite Diagonale wähle man das Dreieck bcd, für die dritte das Dreieck def.

Aufgabe 1. Zu dem einen Theilpunkte einer Strecke den conjugirt-harmonischen zu finden und zwar bloß mit Hülfe des Lineals. (Vgl. §. 5 Aufg. 1. Anmerkung).

Ist die Strecke ab und der Theilpunkt c gegeben und man will den dem c conjugirten harmonischen Punkt d finden, so ziehe man durch c irgend eine Grade ef, nehme darin zwei willkürliche Punkte e, f, verbinde diese mit den zwei übrigen gegebenen Punkten durch Grade fa, fb, ea, eb, die sich in g und h schneiden, so wird die Grade gh durch den gesuchten Punkt d gehen. (Vgl. Jakob Steiner, system. Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten pag. 75).

Erklärung 2. Vier Punkte in einer Ebene bilden ein vollständiges Viereck; jeder dieser Punkte heißt eine Ecke desselben, die Verbindungslinien der Ecken heißen Seiten; das vollständige Viereck hat also 4 Ecken und 6 Seiten. Diejenigen 3 Schnittpunkte der letzteren, welche noch nicht Ecken sind, heißen Diagonalpunkte, die drei Verbindungslinien derselben Diagonalen. Durch jeden Diagonalpunkt gehen zwei Seiten und zwei Diagonalen.

Lehrsatz 2. Je zwei durch einen Diagonalpunkt gehenden Diagonale eines vollständigen Vierecks sind zu den zwei durch denselben Diagonalpunkt gehenden Seiten conjugirte harmonische Strahlen.

Nach dem vorigen Lehrsatze bilden in der dazu gehörigen Figur a, A, c, B eine harmonische Punktreihe, also bilden ea, eA, ec, eB ein harmonisches Büschel ꝛc.

Zusatz. Daraus folgt, daß auch b, h, c, f und a, g, d, f und i, a, k, f harmonische Punktreihen sind.

Aufgabe 2. Zu dem einen Theilstrahl eines Winkels den conjugirt-harmonischen zu finden und zwar bloß mit Hülfe des Lineals.

Ist der Winkel ab und der Theilstrahl c gegeben und man will den dem c conjugirten harmonischen Strahl d finden, so nehme man in c irgend einen Punkt und lege durch ihn 2 willkürliche Grade e und f, die den zwei übrigen gegebenen Strahlen in den Punkten f'a, f'b, e'a und e'b begegnen, verbinde diese durch die Graden g und h, so wird der Schnittpunkt von g und h, den wir durch g·h bezeichnen, auf dem gesuchten Strahl d liegen.

Aufgabe 3. Man soll bloß mit Hülfe des Lineals durch einen gegebenen Punkt nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier gegebenen Graden eine Grade ziehen. (Fig. 18 und 19).

Man ziehe durch den gegebenen Punkt a zwei beliebige Linien b'c und bc' und verbinde ihre Durchschnittspunkte mit den gegebenen Linien durch die Graden cc' und b'b, die sich in d schneiden. Die Verbindungslinie des Schnittpunkts x der gegebenen Linien mit a ist dann in Bezug auf dieselben der conjugirt harmonische Strahl zu xd. Ziehe ich jetzt von d aus eine beliebige Grade, welche die gegebenen Linien in e und e' schneidet und verbinde e mit b' und e' mit b durch Graden, die sich in a' schneiden, so ist die Verbindungslinie von x mit a' der conjugirt harmonische Strahl zu xd. Die Punkte x, a und a' liegen also auf derselben Graden. Da aber eine Grade schon durch 2 Punkte bestimmt wird, so brauche ich bloß a' mit a zu verbinden, um ax zu erhalten.

Aufgabe 4. Man soll bloß mit Hülfe des Lineals auf einer gegebenen Graden einen Punkt bestimmen, der auf der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte liegt, ohne daß man diese Verbindungslinie ziehen kann. (Fig. 20).

Man nehme auf der gegebenen Graden zwei beliebige Punkte c und d an, verbinde dieselben mit den gegebenen Punkten a und b durch die Graden da, db, ca, cb, die sich in g und h schneiden. Der gesuchte Schnittpunkt von ab mit cd ist dann in Bezug auf a und b der conjugirt harmonische Punkt zu dem Schnittpunkte k von ab und gh. Nehme ich jetzt auf gh einen beliebigen Punkt l und verbinde ihn mit a und b durch Graden, welche ad und cb in m und n schneiden, so ist der Schnittpunkt von ab und mn wiederum der conjugirt harmonische Punkt zu k. Die Linien ab, cd und mn gehen also durch denselben Punkt. Da aber ein Punkt schon durch den Durchschnitt zweier Graden bestimmt wird, so brauche ich bloß den Schnittpunkt von mn und cd zu suchen, um den von ab und cd zu erhalten.

Aufgabe 5. Wenn 3 Grade und ein Punkt gegeben sind, so soll, mittelst des Lineals allein, durch den gegebenen Punkt eine Grade so gezogen werden, daß er und die 3 Durch-

schnitte, welche sie mit den 3 Graden macht, vier harmonische Punkte sind. (Fig. 21.)

Sind etwa a', b', b und ϑ gegeben, so ziehe man z. B. die Grade ϑB oder d', suche zu den 3 Strahlen a', b', d' den 4ten dem d' zugeordneten harmonischen Strahl c', der der 3ten Graden b in A begegnet, so wird die Grade Aϑ der Aufgabe genügen, d. h. die 4 Punkte ϑ, d, A, d' sind harmonisch. Zwei andere Grade, welche ebenfalls der Aufgabe genügen, findet man in ähnlicher Weise.

Aufgabe 6. **Wenn 3 Punkte und eine Grade gegeben sind, so soll mittelst des Lineals allein, in der Graden ein Punkt gefunden werden, daß sie und die 3 Graden, welche er mit den 3 Punkten bestimmt, vier harmonische Strahlen sind.**

Sind etwa a, ϑ, B und b gegeben, so ziehe man z. B. die Grade aB, suche zu den 3 Punkten a, b, B den vierten, dem B zugeordneten harmonischen Punkt d, ziehe die Grade dϑ so wird diese der gegebenen Graden b in einem Punkt A begegnen, welcher der Aufgabe genügt, so daß a, d, b, c' harmonisch sind. Zwei andere Punkte, die auch der Aufgabe genügen, findet man auf ähnliche Weise.

Anmerkung. Die 2 letzten Aufgaben sind wörtlich aus J. Steiner a. a. O. pag. 75 herübergenommen.

Aufgabe 7. **Es soll bewiesen werden, daß die Höhen eines Dreiecks die Winkel des Fußpunktsdreiecks halbiren. (Fig. 22.)**

Die Linien ab, aa' und cb, cc' bilden ein vollständiges Vierseit mit den Diagonalen bo, c'a' und ac und den auf bo liegenden Diagonalpunkten b'' und b'; letztere theilen nach Lehrsatz 1 die Strcke bo harmonisch. Daher ist auch das Strahlenbüschel a'b, a'b'', a'o, a'b' harmonisch und da die Strahlen a'b und a'o aufeinander senkrecht stehen, so halbirt a'a nach der zweiten Umkehrung des Lehrsatzes 2 des §. 6 den Winkel der beiden andern. Das Nämliche läßt sich für die beiden anderen Winkel beweisen.

Aufgabe 8. **Es sollen folgende zwei Sätze bewiesen werden:**

Wenn man je 2 Fußpunkte von 3 sich in einem Punkte schneidenden Ecktransversalen eines Dreiecks verbindet, so treffen die Verbindungslinien die Gegenseiten in 3 Punkten, welche in grader Linie liegen.

Wenn man je 2 von 3 in grader Linie auf den Seiten eines Dreiecks liegenden Punkten mit den Gegenecken und den Durchschnittspunkt der Verbindungslinien mit der dritten Ecke

verbindet, so schneiden sich die dadurch entstehenden 3 Ecktransversalen in einem Punkte.

Anmerkung. Durch diese 2 Sätze sind mehrere der in §. 4 vorkommenden Sätze untereinander verbunden.

Aufgabe 9. Es soll bewiesen werden, daß die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits auf einer graden Linie liegen. (Fig. 23).

Heißen diese Mittelpunkte l, m, n so muß, wenn die Behauptung richtig ist,

$$\frac{Al \cdot Bm \cdot Cn}{lB \cdot mC \cdot nA} \text{ identisch } = -1 \text{ sein.}$$

Nun ist aber nach §. 5 (4)

$$\frac{Al}{lB} = -\frac{Aa^2}{Ba^2},\ \frac{Bm}{mC} = -\frac{Be^2}{Ce^2},\ \frac{Cn}{nA} = -\frac{Cb^2}{Ab^2}$$

$$\text{also } \frac{Al \cdot Bm \cdot Cn}{lB \cdot mC \cdot nA} = -\frac{Aa^2 \cdot Be^2 \cdot Cb^2}{Ba^2 \cdot Ce^2 \cdot Ab^2}$$

Wendet man nun den Menelaus'schen Satz auf das Diagonalendreieck ABC, geschnitten durch die Transversale abe an, so erhält man

$$\frac{Aa \cdot Be \cdot Cb}{aB \cdot eC \cdot bA} = -1$$

und das Quadrat davon $= +1$; daher ist in der That die verlangte Identität erfüllt.

Aufgabe 10. Es soll bewiesen werden, daß in einem vollständigen Viereck die Mittelpunkte je zweier Seiten und der nicht in einem Punkt mit ihnen zusammenlaufenden Diagonale in einer graden Linie liegen. (Fig. 23).

Der Mittelpunkt l der Diagonale ef und die Mittelpunkte m und n der Seiten cd und ab des vollständigen Vierecks a, b, c, d sind zugleich die Mittelpunkte der Diagonalen des vollständigen Vierseits ac, ad, bc, bd und liegen deshalb nach der vorigen Aufgabe in grader Linie; ebenso l', m', n' als Diagonalmittelpunkte des Vierseits db, dc, ab, ac und l'', m'', n'' als Diagonalmittelpunkte des Vierseits ea, eb, ga, gd.

Anmerkung. Die Linien lmn, l'm'n', verbinden die Mittelpunkte der Seiten und l''m''n'' die Mittelpunkte der Diagonalen des gewöhnlichen Vierecks abcd und schneiden sich in einem Punkte, vgl. Lafrémoire Sammlung pag. 3 Lehrsatz 6.

§. 8. Pol und Polare.

Erklärung. Zwei Punkte, welche den Durchmesser eines Kreises harmonisch theilen, heißen conjugirte Pole; der

eine liegt zwischen den Endpunkten des Durchmessers, der andere auf seiner Verlängerung. Eine Senkrechte, welche man in einem derselben auf den Durchmesser oder seine Verlängerung errichtet, heißt **Polare** in Bezug auf den anderen als **Pol**. Zwischen den Entfernungen oc und oo′ des Pols und der Polare vom Mittelpunkt o des Kreises vom Halbmesser r besteht nach §. 5, (3) immer die Relation $r^2 = oc \cdot oc'$. Die Polare fällt entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises, je nachdem der Pol innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Findet der letztere Fall statt, so folgt aus §. 5 Aufg. 1, daß alsdann die Polare nichts anders ist, als die Verbindungslinie der Berührungspunkte der vom Pol an den Kreis gelegten Tangenten, weshalb man sie in diesem speciellen Fall auch **Berührungssehne** nennt. Liegt der Pol in der Peripherie des Kreises, so geht die Polare durch den Pol und wird zur Tangente, weil sie jetzt in dem Endpunkte des Durchmessers auf demselben senkrecht steht.

Lehrsatz 1. Auf jeder durch den Pol gehenden Secante wird die Strecke zwischen den Durchschnittspunkten mit dem Kreis durch den Pol und den Durchschnittspunkt mit der Polare harmonisch getheilt.

Erster Fall. Der Pol liegt außerhalb des Kreises. (Fig. 24).

Da die Strecke ab nach der Voraussetzung durch q und p harmonisch getheilt ist, so bildet a′a, a′q, a′b, a′p ein harmonisches Büschel. In diesem stehen 2 Strahlen, nämlich a′a und a′b, aufeinander senkrecht als Schenkel eines Peripheriewinkels über dem Durchmesser, daher wird der Winkel von a′q und a′p halbirt nach §. 6, Lehrsatz 2, Umkehrung 2; deswegen sind aber auch die Bogen b′b und b″b und in Folge davon auch die Centriwinkel b′ob und b″ob einander gleich. Daher sind die Dreiecke b′oq und b″oq congruent und folglich $\sphericalangle$ b′qo $= \sphericalangle$ b″qo. Wenn aber Winkel gleich sind, so sind es auch ihre Nebenwinkel, folglich $\sphericalangle$ b′qb $= \sphericalangle$ b″qb. Da nun qq′ auf qb senkrecht steht und der Winkel von qb′ und qb″ durch qb halbirt wird, so halbirt qq′ den Winkel a′qb′, welcher der Nebenwinkel von b′qb″ ist. Dann folgt aber aus §. 6 Lehrsatz 2, daß qa′, qq′, qb′, qp ein harmonisches Büschel bilden, das durch die von p ausgehende Secante in den harmonischen Punkten p, b′, q′, a′ geschnitten wird.

Zweiter Fall. Der Pol liegt innerhalb des Kreises. (Fig. 25).

Der Beweis wird wörtlich so geführt, wie im ersten Fall.

Lehrsatz 2. Rückt der Pol auf einer graden Linie fort, so dreht sich die Polare um den Pol derselben und umgekehrt, oder auch anders ausgedrückt: Die Verbindungslinie zweier Punkte ist die Polare des Schnittpunkts ihrer Polaren, und umgekehrt: Der Schnittpunkt zweier Linien ist der Pol der Verbindungslinie ihrer Pole.

Es sei qq″ die Polare von p (Fig. 26); errichtet man in p auf oq eine Senkrechte pp′, so ist diese die Polare von q. Bewegt sich nun der Pol von p nach p′ auf der Polare von q fort, so muß die Polare senkrecht auf op′ stehen und es muß, wenn oq′ die Entfernung der Polare vom Mittelpunkt bedeutet, die Relation stattfinden $r^2 = op' \cdot oq'$. Beide Bedingungen werden erfüllt, wenn man von q aus auf op′ eine Senkrechte fällt; denn alsdann sind die Dreiecke opp′ und oqq′ ähnlich und in Folge dessen $\frac{op'}{op} = \frac{oq}{oq'}$ oder $op' \cdot oq' = op \cdot oq$; da aber $op \cdot oq = r^2$, so muß auch $op' \cdot oq' = r^2$ sein. Folglich ist qq′ die Polare von p′ und geht durch den Pol q von pp′.

Läßt man umgekehrt die Polare sich um q drehen, so daß sie in die Lage qq′ kommt, so muß der Pol auf einer Senkrechten zu dieser Linie vom Mittelpunkt aus liegen und, wenn op′ seine Entfernung vom Mittelpunkt bedeutet, die Relation stattfinden $r^2 = op' \cdot oq'$. Beide Bedingungen werden erfüllt, wenn man in p auf op eine Senkrechte errichtet, welche oq′ in p′, dem gesuchten Pol, schneidet; denn alsdann ist aus den nämlichen Gründen wie vorhin $r^2 = op' \cdot oq'$. Folglich ist p′ der Pol von qq′ und liegt auf der Polare von qq″.

Ganz ebenso wird der Beweis geführt, wenn sich der Pol auf einer Linie fortbewegt, die außerhalb des Kreises liegt.

Lehrsatz 3. Der Winkel zwischen 2 von irgend einem Punkte der Polare an den Kreis gelegten Tangenten wird durch die Polare und den durch den Pol gehenden Strahl harmonisch getheilt. (Fig. 27.)

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte α', β' geht nämlich auch durch den Pol π der Polare p, weil ihr Pol nach der Voraussetzung auf p liegt; vgl. den vorigen Lehrsatz. Daher bilden α', π', β', π' nach Lehrsatz 1 eine harmonische Punktreihe und das darauf stehende Büschel a′, q′, b′, p ist ein harmonisches.

Lehrsatz 4. In jedem einem Kreise eingeschriebenen vollständigen Viereck ist je ein Diagonalpunkt der Pol der ihm gegenüberliegenden Diagonale. (Fig. 28.)

Nach Lehrsatz 2 des §. 7 sind e, f, g die Scheitel von harmonischen Strahlenbüscheln, die aus je 2 Seiten und Diagonalen des vollständigen Vierecks gebildet sind. Daher sind einerseits f, b, h, a und f, c, h, d, andererseits g, d, i, a und g, c, l, b harmonische Punktreihen, folglich gehören nach Lehrsatz 1 dieses § die Punkte h und k der Polare von f, die Punkte i und l der Polare von g an oder eg ist die Polare von f und ef die von i. Daraus folgt nach Lehrsatz 2 dieses §, daß auch fg die Polare von e ist.

Lehrsatz 5. In jedem dem Kreis umschriebenen Vierseit ist je eine Diagonale die Polare des ihr gegenüberliegenden Diagonalpunktes. (Fig. 29).

Nach Lehrsatz 1 des §. 7 sind ef, bd, ae die Träger harmonischer Punktreihen, die aus je 2 Eckpunkten und Diagonalpunkten des vollständigen Vierseits bestehen. Daher sind einerseits ae, ah, af, ak und ce, ch, cf, ck und andererseits be, bh, bf, bk und de, dh, df, dk harmonische Strahlenbüschel, folglich gehen nach Lehrsatz 3 dieses Paraprapheu die Linien ah, ch durch den Pol von ac, die Linien bk, dk durch den Pol von bd, oder h ist der Pol von ac und k der von bd. Daraus folgt nach Lehrsatz 2 dieses §, daß auch i der Pol von hk ist.

Lehrsatz 6. Legt man in den Endpunkten eines dem Kreis eingeschriebenen vollständigen Vierecks Tangenten an denselben, so entsteht ein dem Kreis umschriebenes Vierseit, dessen Diagonalendreieck mit dem des eingeschriebenen Vierecks zusammenfällt, oder, was dasselbe heißt, je 2 Diagonalpunkte des Vierecks liegen auf einer Diagonale des Vierseits und theilen dieselbe harmonisch. (Fig. 30.)

Denn f' ist der Pol von bd und c' der von ac, also ist der Schnittpunkt von bd und ac d. h. A der Pol von e'f'; A ist aber auch der Pol von BC, also fällt BC mit e'f' zusammen. Ebenso ist b' der Pol von ab und d' der Pol von dc, also ist der Schnittpunkt von ab und dc d. h. B der Pol von b'd'; B ist aber auch der Pol von AC, daher sind b'd' und AC identisch. Aus ähnlichen Gründen sind a'c' und AB identisch und der Durchschnitt von b'd' und a'c' identisch mit A, der von a'c' und e'f' identisch mit B und der von b'd' und e'f' identisch mit C, d. h. die Diagonalpunkte im Viereck und Vierseit fallen zusammen. Deshalb sind auch e'f' durch B und C, a'c' durch A und B, b'd' durch A und C harmonisch getheilt.

Anmerkung. Alle in diesem Paragraphen vorkommenden Sätze gelten unverändert für jeden Kegelschnitt. Dies erklärt sich aus dem projectivischen Zusammenhang zwischen Kreis und Kegelschnitten. Zieht man nämlich von einem Punkte im Raume Strahlen nach allen Punkten einer Kreisperipherie, so gehören ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen

Ebene im Allgemeinen einem Kegelschnitt an; diesen Vorgang nennt man Projection. Ebenso kann man durch geeignete Wahl des Projectionspunktes und der Projectionsebene einen Kegelschnitt zu einem Kreis projiciren. Dabei bleiben aber Tangente und ihre Berührungspunkte, Polaren und Pole ꝛc., wenn man sie mitprojicirt, obgleich sie sich in ihrer Stellung zu einander verschieben, doch das, was sie waren und alle Sätze, die sich auf die Lage dieser Linien, nicht auf ihre metrischen Verhältnisse beziehen, gelten auch für die Projection. Solche Eigenschaften von Figuren, die auch nach der Projection noch fortdauern, nennt man projectivische.

§. 9. Anwendungen der Lehre vom Pol und der Polaren.

Aufgabe 1. Von einem gegebenen Punkte an einen Kreis bloß mit Hülfe des Lineals ein Tangentenpaar zu ziehen. (Fig. 31.)

Die Aufgabe kommt darauf hinaus, die Polare des gegebenen Punktes zu finden, weil, wenn diese bekannt ist, durch ihre Schnittpunkte mit dem Kreis die Berührungspunkte des gesuchten Tangentenpaares bestimmt sind. Man zieht zu diesem Behufe von dem gegebenen Punkte aus zwei beliebige Secanten durch den Kreis, welche denselben bezüglich in den Punkten a, b und a′, b′ schneiden, verbinde a mit b′ und b mit a′ durch Grade, die sich in e schneiden, ebenso verbinde man b mit b′ und a mit a′ durch Graden, die sich in d schneiden. Die Verbindungslinie von d und e ist alsdann die Polare des gegebenen Punktes nach Lehrsatz 4 des §. 6.

Zusatz. Der Punkt e der vorigen Construction ist ein Punkt der Polare. Zieht man nun von dem gegebenen Punkte aus noch eine dritte Secante durch den Kreis, welche die Schnittpunkte a″, b″ hat und verbindet a′ mit b″ und b′ mit a″ durch Grade, so schneiden sich diese in einem Punkte e′, der aus dem nämlichen Grunde wie e der Polare angehört. Man erhält dieselbe daher auch durch Verbindung von e und e′. (Fig. 32.)

Aufgabe 2. Zu einer gegebenen Graden den Pol zu suchen.

Man zieht von 2 Punkten der gegebenen Graden, welche außerhalb des Kreises liegen, aber sonst beliebig sind, je ein Tangentenpaar an denselben; der Durchschnittspunkt der Berührungssehnen ist der gesuchte Pol nach Lehrsatz 2 oder auch 5 des vorigen Paragraphen.

Aufgabe 3. Man soll folgenden Lehrsatz beweisen: Beschreibt man in ein Dreieck einen Kreis und verbindet die Ecken mit den Berührungspunkten durch grade Linien, so schneiden sich diese bekanntlich (siehe Lehrsatz 4 des §. 3) in einem Punkte. Legt man aber in den zweiten Schnittpunkten

der Verbindungslinien Tangenten an den Kreis, so schneiden diese die Gegenseiten in 3 Punkten, welche in grader Linie liegen. Vgl. Salmon analyt. Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von Fiedler. 2. Aufl. Nr. 159. p. 191.

Diese 3 Punkte sind die Pole der bezüglichen Verbindungslinien und da diese sich in einem Punkte schneiden, so müssen jene auf einer graden Linie liegen nach Lehrsatz 2 des vorigen Paragraphen.

Aufgabe 4. Man soll folgende Lehrsatz beweisen: Beschreibt man um ein Dreieck einen Kreis und legt in den Eckpunkten Tangenten an denselben, so schneiden diese die Gegenseiten in drei Punkten, die auf einer graden Linie liegen (siehe Lehrsatz 5 des §. 3). Legt man aber von diesen drei Punkten aus die zweiten Tangenten an den Kreis, so schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken in einem Punkte.

Diese 3 Verbindungslinien sind die Polaren der bezüglichen Schnittpunkte und da diese sich auf einer Graden befinden, so müssen jene durch einen Punkt gehen nach Lehrsatz 2 des vorigen Paragraphen.

Aufgabe 5. In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch 3 gegebene Punkte gehen. (Fig. 33.)

Man suche zu a, b, c die Polaren, welche ein Dreiseit $\alpha\beta\gamma$ bilden, verbinde die Eckpunkte desselben mit den Polen der gegenüberliegenden Seiten und construire das Fußpunktsdreieck $\alpha'\beta'\gamma'$; die Schnittpunkte der Seiten des letzteren mit dem Kreis sind die Ecken zweier Dreiecke der verlangten Art.

Der Beweis für die Richtigkeit der Construction kann in folgender Weise geführt werden:

1. Verbindet man die Schnittpunkte von $\beta'\gamma'$ mit dem Kreis, nämlich 2 und 5, jeden mit b und c durch Grade, welche den Kreis bezüglich in den Punkten 1, 3 und 4, 6 schneiden, so ist die Construction richtig, wenn a der Schnittpunkt von 13 und 46 ist.

Nun ist aber $\beta\beta'$ die Polare des Schnittpunkts g von $\alpha\gamma$ und ac, weil b der Pol von $\alpha\gamma$ und β der Pol von ac ist, so daß g, c, a in grader Linie liegen; ebenso ist $\gamma\gamma'$ die Polare des Schnittpunkts h von $\alpha\beta$ und ab, so daß h, b, a in grader Linie liegen. Daher ist a der Schnittpunkt von gc und hb.

2. Es ist ferner in dem vollständigen Viereck 4251 der Punkt b ein Diagonalpunkt und folglich der Pol der gegenüberliegenden Diagonale; da b aber auch der Pol von $\alpha\gamma$ ist, so ist $\alpha\gamma$ diese Diagonale und die Verbindungslinien von 24 und 51 müssen sich auf ihr und zwar in dem Pol

von $\beta\beta'$ nämlich in g schneiden; auch muß 14 mit β' in grader Linie liegen, weil sonst der Schnittpunkt mit 52 nicht auf der Polare von b liegen würde. Ebenso müssen sich 53 und 26 auf $\alpha\beta$ und zwar in dem Pole von $\gamma\gamma'$, nämlich in h, schneiden.

3. Nach dem später zu beweisenden Paskal'schen Lehrsatze schneiden sich endlich in dem Sechseck 423156 die Seiten 42 und 15, 23 und 56, 31 und 64 in Punkten, die auf einer graden Linie liegen; nennt man den letzten Schnittpunkt x, so liegen also g, c und x in grader Linie; ebenso liegen auch h, b und x in grader Linie. Daraus folgt, daß x der Schnittpunkt von gc und hb ist; letzteren haben wir aber oben in a gefunden, daher fällt x mit a zusammen.

Anmerkung. In dem Sechseck 426153 liegen die Schnittpunkte von 42 und 15, 26 und 53, 61 und 34 ebenfalls nach dem Pascal'schen Satze in grader Linie; da dieselben aber die Pole von $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ und $\alpha\alpha'$ sind, so schneiden sich diese letzteren Linien in einem Punkte. Die Dreiecke abc, $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ liegen deshalb colliniar und o ist ihr Collineationscentrum; die Collineationsaxe der Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$ ist die Polare von o.

Aufgabe 6. Um einen Kreis ein Dreiseit zu beschreiben, dessen Ecken auf 3 gegebenen Graden liegen.

Man suche zu den gegebenen Graden die Pole, welche ein neues Dreieck bilden, verbinde die Durchschnittspunkte der Seiten desselben und der Polare der gegenüberliegenden Ecken mit diesen Ecken, so entsteht ein Dreiseit; die Tangenten von den Ecken desselben an den Kreis sind die Seiten zweier Dreiseite der verlangten Art.

Nehmen wir die vorige Figur zu Hülfe und seien darin $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ die gegebenen Graden, dann sind c, b a ihre Pole. Der Schnittpunkt von bc und $\beta\gamma$ ist aber, wie wir in der vorigen Aufgabe sahen, der Pol von $\alpha\alpha'$ und die Verbindungslinie dieses Pols mit a muß deshalb die Polare von α' sein. Das Dreiseit, von dessen Ecken die Tangenten gezogen werden sollen, ist daher gebildet aus den Polaren von α', β', γ' und seine Eckpunkte sind die Pole von $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$ und $\beta'\gamma'$. Macht man daher ganz dieselbe Construction wie zu der vorigen Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß man die Punkte a, b, c, die dort gegeben sind, erst sucht, so sagt unsere jetzige Construction nichts weiter, als daß man an den Punkten 1, 2, 3 und 4, 5, 6 Tangenten an den Kreis legen solle, die 2 dadurch entstehenden Dreiseite würden dann der Aufgabe genügen, und in der That liegen die Pole von 12 und 45 auf $\alpha\gamma$, weil sie durch den Pol b dieser Linie gehen u. s. w.

§. 10. Der Carnot'sche Lehrsatz.

Vorbemerkung. Wenn die Seiten eines Dreiecks durch einen Kreis geschnitten werden, so entstehen auf jeder derselben

zwei Paare von Abschnitten, von denen jedes durch einen Eckpunkt und die Schnittpunkte der zugehörigen Seite mit dem Kreise bestimmt ist, auf der Seite ab z. B. die Paare aa′, aa″ und ba″, ba′. (Fig. 34.)

Lehrsatz. Das Produkt von drei in derselben Richtung genommenen Paaren von Abschnitten ist gleich dem Produkte der drei anderen in entgegengesetzter Richtung genommenen Paare. Es ist also

$$aa' . aa'' . bb' . bb'' . cc' . cc'' = ac'' . ac' . cb'' . cb' . ba'' . ba'.$$

Man hat nämlich nach einem bekannten Lehrsatze der Planimetrie:

$$aa' . aa'' = ac'' . ac'$$
$$bb' . bb'' = cb'' . cb'$$
$$cc' . cc = ba'' . ba'.$$

Durch Multiplication dieser 3 Gleichungen ergibt sich das Behauptete.

Anmerkung. Der Satz hat seinen Namen von dem auch in der politischen Geschichte als schroffer Republikaner bekannten Mathematiker Carnot, der ihn in seiner „Theorie der Transversalen“ mitgetheilt hat.

Zusatz. Der Carnot'sche Satz ist projectivisch, d. h. er gilt für jeden Kegelschnitt und folglich auch für 2 sich schneidende Grade. Für den letzteren Fall können wir mit unseren Hülfsmitteln den Beweis liefern.

Der Menelans'sche Satz liefert nämlich, wenn man das Dreieck abc (Fig. 35) nacheinander durch die Transversalen a′c′ und a″c″ schneiden läßt. die Gleichungen:

$$\frac{aa' . bb' . cc'}{a'b . b'c . c'a} = -1, \quad \frac{aa'' . bb'' . cc''}{a''b . b''c . c''a} = -1$$

deren Multiplication das zu Beweisende ergibt.

§. 11. Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Lehrsatz.

Lehrsatz 1. Die Durchschnittspunkte von je 2 gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks, welches in den Kreis beschrieben ist, liegen in grader Linie. (Fig: 36.)

Es seien ab und de, bc und ef, cd und fa die Paare gegenüberliegender Seiten, welche sich bezüglich in p, q, r schneiden. Die Durchschnittspunkte je zweier durch eine dritte getrennter Seiten bilden zwei Dreiecke lmn und l′m′n′, jenes entstanden durch die Durchschnitte von bc, de und fa, dieses durch die von ab, cd und ef; beide Dreiecke bestimmen sich gegenseitig, so daß es gleichgültig ist, welches man zum Beweise verwendet.

Es ist nun nach dem Carnot'schen Satze für das Dreieck lmn:

$$lf . la . nb . nc . md . me = le . ld . mc . mb . na . nf$$

und wenn man das Dreieck lmn nacheinander durch die Transversalen ef, cd und ab geschnitten denkt:

$$le \,.\, mr \,.\, nf = - em \,.\, rn \,.\, fl$$
$$mc \,.\, nq \,.\, ld = - cn \,.\, ql \,.\, dm$$
$$na \,.\, lp \,.\, mb = - al \,.\, pm \,.\, bn.$$

Multiplicirt man diese 4 Gleichungen, so kommt mit Berücksichtigung der Zeichen:

$$mr \,.\, lp \,.\, nq = - rn \,.\, pm \,.\, ql.$$

Daher liegen nach dem umgekehrten Menelaus'schen Satze die Punkte p, q und r in grader Linie.

Anmerkung 1. Der Satz hat seinen Namen von seinem Erfinder Blaise Pascal (1623—1662), einem der größten Mathematiker. Er schrieb schon in seinem 16ten Jahre eine Abhandlung über die Kegelschnitte, erfand eine Rechenmaschine und verwendete zuerst das Barometer zum Höhenmessen; auch war er der Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bekannter als durch seine mathematischen und physikalischen Schriften ist er durch seine Briefe (les Provinciales), worin er die Jesuiten angriff, und durch seine Pensées sur la réligion geworden.

Anmerkung 2. Sechs Punkte auf einem Kreis kann man auf vielfache Weise zu einem Pascal'schen Sechseck zusammenstellen. Die Zahl aller möglichen Sechsecke würde gleich der Permutationszahl von sechs Elementen, also 6! oder 720 sein, wenn nicht manche der Permutationen ein und dasselbe Sechseck bezeichneten. Nimmt man nämlich irgend eine beliebige Permutation, so gehen aus derselben durch cyclische Vertauschung noch fünf andere Permutationen hervor, die dem nämlichen Sechseck angehören, wie die erste. Alle Permutationen zerfallen also in 120 Gruppen zu je 6 Complexionen und man hat nur so viel verschiedene Sechsecke als Gruppen vorhanden sind, nämlich 120. Aber auch diese reduciren sich auf die Hälfte, also auf sechzig, wenn man bedenkt, daß jede Complexion, in umgekehrter Ordnung gelesen, das nämliche Sechseck bezeichnet.

Anmerkung 3. Die Grade, auf der die Punkte p, q, r liegen, heißt die Pascal'sche Linie. Da man aber 6 Punkte auf 60 verschiedene Arten zu einem Sechseck zusammenstellen kann, so gibt es für 6 Punkte auf einem Kreise auch 60 Pascal'sche Linien, von welchen Steiner einen merkwürdigen Zusammenhang nachgewiesen hat. Je 3 derselben gehen nämlich immer durch einen Punkt, den sogenannten Steiner'schen Punkt und die 20 Steiner'schen Punkte liegen wieder zu je 4 auf 15 Graden, den sogenannten Steiner'schen Graden.

Anmerkung 4. Der Pascal'sche Satz ist projectivisch und gilt also für alle Kegelschnitte. Daß er für 2 Grade seine Richtigkeit hat, können wir mit unseren Hülfsmitteln beweisen. (Fig. 37.)

Nach dem Carnot'schen Satze, angewandt auf das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, in dessen Ecken sich je 2 durch eine 3te getrennte Seiten des den Graden 135 und 642 einbeschriebenen Sechsecks schneiden, hat man:

$$\frac{\alpha 5 \,.\, \alpha 6 \,.\, \beta 3 \,.\, \beta 4 \,.\, \gamma 1 \,.\, \gamma 2}{\alpha 1 \,.\, \alpha 2 \,.\, \beta 5 \,.\, \beta 6 \,.\, \gamma 3 \,.\, \gamma 4} = 1$$

und nach dem Menelaus'schen Satze, wenn man dasselbe Dreieck nacheinander durch die Transversalen 54, 32, 61 schneiden läßt:

$$\frac{\gamma a \,.\, \alpha 5 \,.\, \beta 4}{a\alpha \,.\, 5\beta \,.\, 4\gamma} = -1$$

$$\frac{\alpha b \,.\, \beta 3 \,.\, \gamma 2}{b\beta \,.\, 3\gamma \,.\, 2\alpha} = -1$$

$$\frac{\beta c \,.\, \gamma 1 \,.\, \alpha b}{c\gamma \,.\, 1\alpha \,.\, b\beta} = -1$$

Durch Multiplication dieser vier Gleichungen kommt mit Berücksichtigung der Zeichen:

$$\frac{\gamma a \,.\, \alpha b \,.\, \beta c}{a\alpha \,.\, b\beta \,.\, c\gamma} = -1$$

d. h. die Punkte a, b, c liegen in grader Linie.

Zusatz. Dadurch, daß man ein oder zwei oder drei Paar Punkte im Pascal'schen Sechseck in je einen zusammenfallen läßt, ergeben sich folgende Modificationen des Pascal'schen Satzes:

1) Wenn ein Punktpaar in einen Punkt zusammenfällt, so geht das Sechseck in ein Fünfeck und die verschwindende Seite in eine Tangente über, daher der Satz: Legt man in einem Endpunkte eines in den Kreis beschriebenen Fünfecks eine Tangente, so schneidet dieselbe die gegenüberliegende Seite in einem Punkte, welcher mit den Durchschnitten von je 2 gegenüberliegenden der vier übrigen Seiten in grader Linie liegt.

2) Wenn 2 Punktpaare in je einen Punkt zusammenfallen, so geht das Sechseck in ein Viereck und die verschwindenden Seiten gehen in Tangenten über. Daraus ergeben sich mehrere Sätze je nach der Lage der aus 2 Punkten entstandenen Punkte im Vergleich zu den 2 übrigen. Nimmt man zwei gegenüberliegende, so liegt der Durchschnitt der in ihnen gezogenen Tangenten mit den nicht auf dem Kreis liegenden zwei Durchschnittspunkten der vier Seiten in einer Graden.

3) Fallen endlich 3 Punktpaare in je einem Punkt zusammen, so entsteht aus dem Sechseck ein Dreieck und die Durchschnittspunkte der Tangenten in den Ecken mit den Gegenseiten liegen auf einer Graden, ein Satz, den wir schon oben §. 4 Lehrsatz 5 bewiesen haben.

Lehrsatz 2. Die Verbindungslinien von je 2 gegenüberliegenden Ecken eines Sechsseits, welches um den Kreis beschrieben ist, schneiden sich in einem Punkte. (Fig. 38.)

Wenn man die Berührungspunkte a', b', c', d', e', f' der Seiten miteinander durch Grade verbindet, so erhält man ein Pascal'sches Sechseck, in welchem die Durchschnitte von a'b' und d'e', b'c' und e'f', c'd' und f'a' in grader Linie liegen. Nun ist a'f' die Polare von a und c'd' die von d, also schneiden sich beide Grade nach §. 8 Lehrsatz 2 in dem Pole von ad.

Ebenso schneiden sich b'c' und e'f' in dem Pole von be und c'd' und f'a' in dem Pole von cf. Da aber diese 3 Pole in grader Linie liegen, so müssen nach demselben Satze ihre Polaren d. h. ad, be, cf in einem Punkte sich schneiden.

Anmerkung 1. Der Satz hat seinen Namen von dem französischen Mathematiker Brianchon, der ihn 1806 im Journal de l'école polytechnique veröffentlichte.

Anmerkung 2. In ähnlicher Weise wie beim Pascal'schen Sechseck läßt sich für ein Brianchonisches Sechsseit nachweisen, daß es 60 Brianchon'sche Punkte gibt, von denen immer je drei auf einer geraden Linien liegen. Diese 20 Linien gehen aber wieder zu je vier durch 15 Punkte.

Anmerkung 3. Auch der Brianchon'sche Satz ist projectivisch, d. h. er gilt auch für alle Kegelschnitte. Daß er für 2 getrennt liegende Punkte seine Richtigkeit hat, läßt sich mit unseren Hülfsmitteln beweisen. (Fig. 39.)

Hat man ein Sechseck ll'mm'nn', dessen Seiten zu je 3 in den Punkten a und b zusammenlaufen, so ist zu beweisen, daß sich die Verbindungslinien von l und m', von l' und n, von m und n' in einem Punkte schneiden. Verbindet man l, m, n durch gerade Linien und wendet auf das so entstandene Dreieck lmn zweimal hintereinander, einmal für den Punkt a, das andere mal für den Punkt b den Ceva'schen Lehrsatz an, so erhält man:

$$\frac{l\nu \cdot m\lambda \cdot n\mu}{\nu m \cdot \lambda n \cdot \mu l} = 1, \quad \frac{l\nu' \cdot m\lambda' \cdot n\mu'}{\nu' m \cdot \lambda' n \cdot \mu' l} = 1$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{l\nu \cdot l\nu' \cdot m\lambda \cdot m\lambda' \cdot n\mu \cdot n\mu'}{\nu m \cdot \nu' m \cdot \lambda n \cdot \lambda' n \cdot \mu l \cdot \mu' l} = 1 \quad (1)$$

Wendet man den Ceva'schen Satz dreimal auf dasselbe Dreieck in Bezug auf die Punkte l', m', n' an, so bekommt man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{l\nu'' \cdot m\lambda \cdot n\mu'}{\nu'' m \cdot \lambda n \cdot \mu' l} &= 1 \\ \frac{l\nu' \cdot m\lambda'' \cdot n\mu}{\nu' m \cdot \lambda'' n \cdot \mu l} &= 1 \\ \frac{l\nu \cdot m\lambda' \cdot n\mu''}{\nu m \cdot \lambda' n \cdot \mu'' l} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

deren Multiplication ergibt;

$$\frac{l\nu'' \cdot m\lambda'' \cdot n\mu''}{\nu'' m \cdot \lambda'' n \cdot \mu'' l} \cdot \frac{l\nu \cdot l\nu' \cdot m\lambda \cdot m\lambda' \cdot n\mu \cdot n\mu'}{\nu m \cdot \nu' m \cdot \lambda n \cdot \lambda' n \cdot \mu l \cdot \mu' l} = 1$$

Nach (1) ist aber der 2te Factor $= 1$, daher

$$\frac{l\nu'' \cdot m\lambda'' \cdot n\mu''}{\nu'' m \cdot \lambda'' n \cdot \mu'' l} = 1$$

woraus folgt, daß $l\lambda''$, $m\mu''$, $n\nu''$ sich in einem Punkte schneiden.

Zusatz. Dadurch, daß man ein, zwei oder drei Paar Seiten im Brianchon'schen Sechsseit in je eine zusammenfallen läßt, ergeben sich folgende Modificationen des Brianchon'schen Satzes:

1) Wenn ein Seitenpaar in eine Seite zusammenfällt, so geht das Sechsseit in ein Fünfseit und die verschwindende Ecke in einen Berührungspunkt über, daher der Satz: Verbindet man einen Berührungspunkt eines um den Kreis beschriebenen Fünfseits mit der gegenüberliegenden Ecke, so entsteht eine Grade, welche mit der Verbindungslinie von je 2 gegenüberliegenden der vier übrigen Ecken durch einen Punkt geht.

2) Wenn zwei Seitenpaare in je eine Seite zusammenfallen, so geht das Sechsseit in ein Vierseit und die verschwindenden Ecken in Berührungspunkte über. Daraus ergeben sich mehrere Sätze je nach der Lage der aus zwei Seiten entstandenen Seiten im Vergleich zu den zwei übrigen. Nimmt man 2 gegenüberliegende, so geht die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte mit den nicht den Kreis berührenden Verbindungslinien der 4 Ecken durch einen Punkt.

3) Fallen endlich 3 Seitenpaare in je eine Seite zusammen, so entsteht aus dem Sechsseit ein Dreiseit und die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Seiten mit den Gegenecken schneiden sich in einem Punkte, ein Satz, den wir schon oben §. 4, Lehrsatz 4 bewiesen haben.

§. 12. Der Chasles'sche Lehrsatz.

Vorbemerkung. Der Pascal'sche und Brianchon'sche Lehrsatz stehen, wie man leicht erkennt, in einer gewissen Beziehung zu einander; denn sie, sowie die Zusätze zu ihnen lassen sich aus einander herleiten, wenn man statt Punkt Linie, statt Durchschnittspunkt Verbindungslinie, statt Eck Seite, statt Berührungspunkt Tangente und umgekehrt setzt. Ganz dieselbe Beziehung können wir zwischen den meisten der bisher vorgetragenen Sätze wahrnehmen, so zwischen dem Menelaus'schen und Ceva'schen Satz und den daraus abgeleiteten Sätzen und bei den Sätzen über das Viereck und Vierseit, den Pol und die Polare. In der That ist diese Beziehung eine ganz allgemeine und beherrscht alle Gebilde der Ebene und des Raumes, soweit es auf ihre Lagenverhältnisse ankommt, weil schon die einfachsten Grundgebilde, aus denen alle übrigen entstanden gedacht werden können, einerseits Punktreihe und Ebene, andererseits Strahlenbüschel und Ebenenbüschel in dieser Beziehung zu einander stehen. Dieselbe heißt das Princip der Dualität und ist in der neueren Geometrie die Grundlage zur

Entdeckung zahlreicher Wahrheiten geworden. Mit Hülfe des Brianchon'schen Satzes ist es uns nun möglich das dualistische Gegenstück zu dem Carnot'schen Satze zu finden, welches zuerst Chasles géometrie supérieure übersetzt von Schnuse §. 311 pag. 284 ausgesprochen und Cremona Theorie der ebenen Curven übersetzt von Curtze pag. 60 für eine Curve der mten Klasse bewiesen hat. Es lautet:

Lehrsatz. Zieht man von den Endpunkten eines Dreiecks abc Tangenten an einen gegebenen Kreis, so besteht zwischen den Abschnitten, welche durch dieselben auf den Gegenseiten erzeugt werden, die Relation. (Fig. 40).

$$\frac{a\beta' \cdot a\beta'' \cdot c\alpha' \cdot c\alpha'' \cdot b\gamma' \cdot b\gamma''}{a\gamma' \cdot a\gamma'' \cdot b\alpha' \cdot b\alpha'' \cdot c\beta' \cdot c\beta''} = +1$$

Durch die 6 von a, b, c ausgehenden Tangenten entsteht nämlich ein Brianchon'sches Sechsseit ac'ba'cb', dessen Diagonalen aa', bb', cc', sich in einem Punkte schneiden und die Gegenseiten des Dreiecks abc in den Punkten α, β, γ treffen. Wendet man daher den Ceva'schen Satz an, so kommt

$$\frac{a\beta \cdot c\alpha \cdot b\gamma}{\beta c \cdot \alpha b \cdot \gamma a} = +1$$

Derselbe Satz in Bezug auf die Punkte a', b,' c' liefert

$$\frac{b\alpha \cdot c\beta'' \cdot a\gamma''}{\alpha c \cdot \beta'' a \cdot \gamma'' b} = +1, \quad \frac{c\beta \cdot a\gamma' \cdot b\alpha''}{\beta a \cdot \gamma' b \cdot \alpha'' c} = +1,$$

$$\frac{a\gamma \cdot b\alpha' \cdot c\beta'}{\gamma b \cdot \alpha' c \cdot \beta' a} = +1$$

Die Multiplikation dieser 4 Gleichungen liefert das Verlangte.

Anmerkung. Der Chasles'sche Satz ist wie der Carnot'sche projectivisch d. h. er gilt für alle Kegelschnitte. Für 2 getrenntliegende Punkte läßt er sich mit unseren Hülfsmitteln beweisen. Der Beweis ist in der Gleichung (1) der 3ten Anmerkung zum Brianchon'schen Satze bereits gegeben, wenn man sich von den Eckpunkten des Dreiecks lmn (Fig. 39.) Grade durch die Punkte a und b gezogen denkt.

§. 13. Potenzlinie und Potenzpunkt.

Erklärung und Lehrsatz 1. Zieht man durch irgend einen Punkt in der Ebene eines Kreises Secanten durch denselben, so ist das Produkt von je 2 Abschnitten derselben, welche durch ihre Schnittpunkte mit dem Kreis und den gegebenen Punkt bestimmt werden, constant und heißt Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis.

Erster Fall. Der Punkt liegt außerhalb des Kreises. Dann ist nach einem bekannten Lehrsatze die Potenz gleich dem Quadrate der von dem gegebenen Punkte an den Kreis gelegten Tragente, also eine constante positive Größe.

Zweiter Fall. Der Punkt liegt innerhalb des Kreises. Dann ist das Produkt der Segmente aller sich in diesem Punkte schneidender Sehnen constant und gleich dem negativen Quadrate der halben kürzesten Sehne, die durch diesen Punkt gelegt werden kann. Das negative Zeichen rührt daher, weil die Abschnitte der Sehnen nach entgegengesetzten Seiten vom Schnittpunkt aus liegen.

Erklärung 2. Bestimmt man auf der Centrallinie zweier Kreise einen Punkt derart, daß seine Potenz in Bezug auf beide Kreise gleich ist und errichtet in ihm eine Senkrechte auf die Centrale, so nennt man diese die Potenzlinie beider Kreise.

Lehrsatz 2. Jeder Punkt der Potenzlinie hat in Bezug auf beide Kreise dieselbe Potenz. (Fig. 41.)

Nach der Voraussetzung ist, wenn d ein Punkt der Centrale ist, welcher in Bezug auf beide Kreise die nämliche Potenz hat:

$$db \,.\, dc = db' \,.\, dc'$$

oder, wenn man mit r den Halbmesser des Kreises um o und mit r' den des Kreises um o' bezeichnet,

$$(do - r)\,(do + r) = (do' - r')\,(do' + r') \text{ d. h.}$$

$$do^2 - r^2 = do'^2 - r'^2$$

Addirt man auf beiden Seiten das Quadrat von dd', so erhält man mit Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$d'o^2 - r^2 = d'o'^2 - r'^2, \text{ oder}$$

$$(d'o - r)\,(d'o + r) = (d'o' - r')\,(d'o' + r') \text{ d. h.}$$

$$d'a \,.\, d'f = d'a' \,.\, d'f'.$$

oder der Punkt d' der Potenzlinie, welcher ganz willkürlich gewählt ist, hat in Bezug auf beide Kreise dieselbe Potenz.

Zusatz 1. Aus der Gleichung

$$do^2 - r^2 = do'^2 - r'^2$$

folgt,

$$(do + do')\,(do - do') = r^2 - r'^2$$

Nennt man nun die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise c und bemerkt, daß do = — od ist, so geht diese Gleichung über in

$$c\,(od - do') = r^2 - r^2,$$

oder, wenn man do' durch od und c ausdrückt, in

$$c\,(2od - c) = r^2 - r'^2, \text{ woraus}$$

$$2od = c + \frac{r^2 - r'^2}{c} = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{c} \text{ und}$$

$$2do' = c - \frac{r^2 - r'^2}{c} = \frac{c^2 - r^2 + r'^2}{c}$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, sowohl den Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Centrale zu berechnen und geometrisch zu construiren, als auch im Allgemeinen die Lage der Potenzlinie für verschiedene Lagen der beiden Kreise zu bestimmen. In Bezug darauf kann man verschiedene Fälle unterscheiden.

Erster Fall. Die gegebenen Kreise liegen ganz auseinander. Dann ist $c > r + r'$, also $(c - r)^2 > r'^2$ und $(c - r')^2 > r^2$, woraus einerseits $c^2 + r^2 - r'^2 > 2cr$ und andererseits $c^2 - r^2 + r'^2 > 2cr'$ folgt. Deshalb ist in diesem Falle $od > r$ und $do' > r'$ d. h. die Potenzlinie liegt zwischen beiden Kreisen und schneidet keinen derselben; von jedem Punkte derselben kann man je 2 gleiche Tangente an die Kreise legen. Aus obigen beiden Gleichungen folgt ferner, indem man von der ersten $2r$ und von der zweiten $2r'$ abzieht:

$$2bd = c - 2r + \frac{r^2 - r_{,}^2}{c}$$

$$2db' = c - 2r' - \frac{r^2 - r'^2}{c}$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so kommt

$$2bd - 2db' = -2(r - r') + 2 \,.\, \frac{r^2 - r'^2}{c}.$$

Setzt man nun noch $r > r'$ voraus, so ist die Differenz $2bd - 2db'$ negativ, woraus folgt, daß die Potenzlinie dem größeren der beiden Kreise näher liegt, als dem kleineren.

Zweiter Fall. Die Kreise berühren sich von außen. Dann ist $c = r + r'$, woraus man durch eine ähnliche Rechnung wie im ersten Fall das Resultat erhält $od = r$ und $do' = r'$ d. h. die Potenzlinie ist die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspunkte derselben.

Dritter Fall. Die Kreise schneiden sich. Dann ist $c < r + r'$, woraus man durch eine ähnliche Rechnung, wie im ersten Falle, erhält $od < r$ und $do' < r'$. Die Potenzlinie schneidet also beide Kreise und zwar in ihren 2 gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten, weil jeder von beiden ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf beide Kreise ist, nämlich von der Potenz Null. In der That ist für den Punkt, wo die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, welche auch Chordale genannt wird, die Centrallinie schneidet, die Relation $r^2 - od = r'^2 - do'^2$, welche für die Potenzlinie gilt, ebenfalls erfüllt und es sind daher Chordale und Potenzlinie identisch. In diesem Falle kann man nur

von einem Punkt der Potenzlinie, welcher außerhalb der Kreise liegt, gleiche Tangenten an dieselben ziehen.

Vierter Fall. Die Kreise berühren sich von innen. Dann ist $c = r - r'$, also $(c - r)^2 = r'^2$ und $(c + r')^2 = r^2$, woraus einerseits $c^2 + r^2 - r'^2 = 2cr$ und andererseits $c^2 - r^2 + r'^2 = - 2cr'$ folgt. Deshalb ist in diesem Fall $od = r$ und $do' = - r'$ d. h. die Potenzlinie ist die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspunkte derselben.

Fünfter Fall. Die Kreise liegen ganz ineinander. Dann ist $c < r - r'$, also $r'^2 < (r - c)^2$ und $(c + r')^2 < r^2$ woraus einerseits $2cr < c^2 + r^2 - r'^2$ und andererseits $c^2 - r^2 + r'^2 < - 2cr'$ folgt. Deshalb ist in diesem Falle $od > r$ und $do' < - r'$ d. h. die Potenzlinie liegt außerhalb beider Kreise und zwar nach der Richtung vom Mittelpunkt des größeren nach dem des kleineren hin. Hier sind wieder von jedem Punkte der Potenzlinie gleich Tangenten an beide Kreise möglich.

Sechster Fall. Beide Kreise sind concentrisch. Alsdann ist $c = o$ und aus den Ausdrücken für od und do' folgt, daß er unter dieser Bedingung $od = do' = \infty$ d. h. die Potenzlinie ist die Linie im Unendlichen.

Denken wir uns 2 Kreise, den größeren fest, den kleineren beweglich und lassen letzteren sich dem ersteren immer mehr nähern, so rückt auch die Potenzlinie dem Mittelpunkt des ersteren immer näher; diese Annäherung dauert fort, auch wenn sich beide Kreise schon schneiden, aber nur so lange bis die Chordale gleich dem Durchmesser des kleineren Kreises geworden ist. Nähert sich dann noch weiter der Mittelpunkt des kleineren Kreises dem des größeren, so beginnt die Potenzlinie ihre Bewegung in entgegengesetzter Richtung, bis sie endlich, wenn beide Mittelpunkte zusammenfallen, im Unendlichen ankommt. Für den erwähnten Grenzfall ist $od = \sqrt{r^2 - r'^2}$, $do' = o$.

Aus der Gleichung $2od = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{c}$ folgt nämlich, wenn man daraus c als Unbekannte entwickelt $c = od \pm \sqrt{od^2 - (r - r'^2)}$. Der kleinste Werth nun, welchen od annehmen kann ist $od = \sqrt{r^2 - r,^2}$ weil für einen kleineren der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ, also c, das doch immer reell ist, complex werden würde.

Zusatz 2. In Bezug auf die Größe der Radien beider Kreise kann man ebenfalls mehrere Unterscheidungen machen. Sind beide Radien gleich, so ergibt sich aus den Ausdrücken für od und do', daß beide $= \frac{1}{2}c$ sind d. h. die Potenzlinie steht in der Mitte der Centralen auf derselben senkrecht. Ist $r' = o$ d. h. geht der eine Kreis in einen Punkt über, so ist $2od = \frac{c^2 + r^2}{c}$ und $2do' = \frac{c^2 - r^2}{c}$; man construirt daher die Potenzlinie, im

Falle der Punkt außerhalb des Kreises liegt, wie man durch eine leichte geometrische Betrachtung findet, indem man die Halbirungspunkte der von ihm aus an den Kreis gelegten Tangenten verbindet, wie man schon daraus hätte schließen können, daß jeder dieser Punkte ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf Kreis und Punkt ist. Aus demselben Grunde findet man für die Fälle 1, 2 und 3 des vorigen Zusatzes die Potenzlinie, indem man die Halbirungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten verbindet. Diese Verbindungslinie ist für den Fall 3, identisch mit der Chordale. Gehen beide Kreise in Punkte über, so ist od $=$ do' $= \frac{1}{2}c$ d. h. die Potenzlinie steht in der Mitte ihrer Verbindungslinie senkrecht auf derselben. Nimmt man **r** unendlich groß, so geht der Kreis in eine gerade Linie über und $c = r = \infty$. Daher ist dann od $= r$ und do' $= c - r$ d. h. die Potenzlinie eines Kreises und einer Graden ist diese letztere selbst. Für 2 Grade kann man die eine oder die andere von ihnen als Potenzlinie betrachten.

Lehrsatz 3. Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte, welchen man den Potenzpunkt derselben nennt.

Denn der Schnittpunkt der Potenzlinien des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Kreises ist sowohl ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf den ersten und zweiten, als in Bezug auf den zweiten und dritten Kreis, also auch ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf den ersten und dritten Kreis. Die Potenzlinie dieser zwei letzteren muß also auch durch ihn hindurchgehen.

Zusatz. Der Potenzpunkt ist ein Punkt gleicher Potenz in Bezug auf die drei Kreise und die sechs von ihm aus an dieselben gezogenen Tangenten sind deshalb alle einander gleich; er ist deshalb auch der Mittelpunkt eines Kreises, welcher eine dieser Tangenten zum Radius hat und sämmtliche drei Kreise unter rechten Winkeln schneidet; man nennt denselben den Orthogonalkreis derselben. (Fig. 42.) Es kann für 3 Kreise nur einen Orthogonalkreis geben, aber auch nur dann, wenn vom Potenzpunkt aus Tangenten an alle drei Kreise möglich sind, d. h. wenn die 3 Kreise sich nicht alle schneiden. Dagegen gibt es für 2 Kreise eine unendliche Zahl anderer, welche dieselbe rechtwinklich schneiden; ihre Mittelpunkte liegen alle auf der Potenzlinie der gegebenen Kreise, nur darf als Mittelpunkt kein Punkt innerhalb der gegebenen Kreise angenommen werden, weil von da aus keine Tangenten an dieselben möglich sind.

Aufgabe 1. Zu zwei gegebenen Kreisen die Potenzlinie zu finden. (Fig. 43.)

Man beschreibe einen beliebigen Kreis, der die beiden gegebenen schneidet, Vom Durchschnittspunkte der Chordalen fälle man dann eine Senkrechte auf

auf die Centrale der gegebenen Kreise. Die Construction der Senkrechten auf die Chordale kann dadurch ersetzt werden, daß man einen zweiten Punkt der Potenzlinie bestimmt, indem man die beiden gegebenen Kreise noch einmal durch einen zweiten beliebigen Kreis schneiden läßt und den Durchschnittspunkt der Chordalen sucht. Geht der eine Kreis in einen Punkt über, so beschreibe man einen beliebigen Kreis, der durch diesen Punkt geht und den gegebenen schneidet, lege in diesem Punkte an denselben eine Tangente und fälle von ihrem Durchschnittspunkte mit der Chordalen eine Senkrechte auf die Centrale.

Aufgabe 2. Es soll ein Kreis construirt werden, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen Kreis berührt. (Fig. 44.)

Alle Kreise, die durch die gegebenen zwei Punkte gehen, haben mit dem gesuchten Kreis die Verbindungslinie derselben zur Potenzlinie und ihr Mittelpunkt liegt auf der in der Mitte dieser Verbindungslinie auf derselben errichteten Senkrechten. Beschreibt man nun einen beliebigen Kreis, der durch die zwei Punkte geht und den gegebenen Kreis schneidet, so gehen durch den Potenzpunkt der drei Kreise

1) die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte,

2) die Potenzlinie des gegebenen und des Hülfskreises,

3) die gemeinschaftliche Tangente des gegebenen und des gesuchten Kreises, weil sie nach Lehrsatz 2, Zusatz 1, Fall 3 und 4 die Potenzlinie derselben ist.

Zieht man daher vom Durchschnittspunkt der beiden ersten Linien eine Tangente an den gegebenen Kreis, so ist ihr Berührungspunkt auch zugleich der Berührungspunkt des gesuchten mit dem gegebenen Kreis. Da aber zwei Tangenten möglich sind, so hat man auch zwei Berührungspunkte und in Folge dessen zwei Kreise, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen und von denen der eine den gegebenen Kreis von außen, der andere von innen berührt.

Aufgabe 3. Es soll ein Punktpaar gesucht werden, welches gleichzeitig zwei auf einer Graden liegende Strecken a′a, b′b harmonisch theilt. (Fig. 46.)

Man errichtet über aa′ und bb′ als Durchmessern Kreise und schlägt von einem Punkte d′ ihrer Potenzlinie aus mit einer von da aus an sie gezogenen Tangente d′t als Radius einen Kreis; die Durchschnittspunkte c und c′ desselben mit der Graden, auf der die gegebenen Strecken liegen, sind die verlangten Punkte. Denn da der letzte Kreis die beiden über aa′ und bb′ errichteten Kreise nach Zusatz zu Lehrsatz 3 rechtwinklig schneidet, so sind die Radien ot und o′t′ Tangenten an denselben und folglich sowohl $ot^2 = oc \cdot oc'$, als $o't'^2 = oc' \cdot oc$, was nach §. 5, 3 die harmonische Theilung begründet.

Anmerkung 1. Man erkennt leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$od^2 + dd'^2 = r^2 + d't^2,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$d't^2 - dd'^2 = od^2 - r^2,$$

wo r den Halbmesser des Kreises um o bedeutet.

Daraus geht hervor, daß dd' nur dann kleiner als d't ist, wenn auch $r < od$; d. h. wie aus dem Zusatz 1 zu Lehrsatz 2 des §. 13 hervorgeht, wenn die Potenzlinie der Kreise o und o' dieselben nicht schneidet, was nur dann der Fall sein kann, wenn beide Kreise entweder ganz in einander oder ganz auseinander liegen; nur unter dieser Voraussetzung ist also eine Lösung der Aufgabe möglich.

Anmerkung 2. Es ist gleichgültig, von welchem Punkte der Potenzlinie aus man den Hülfskreis zieht, man erhält immer dieselben Punkte c und c'. Denn da d der Mittelpunkt der Strecke cc' ist, so hat man $dc^2 = dc'^2 = da \,.\, da' = db \,.\, db'$. Schnitte nun ein anderer Hülfskreis die Centrale in den Punkten f und f', so hätte man ebenso $df^2 = df'^2 = da \,.\, da' = db \,.\, db'$ oder es müßte $df = dc$ und $df' = dc'$ sein. Daraus folgt, daß alle die Kreise o und o' rechtwinklig schneidenden Kreise durch dieselben zwei Punkte c und c' ihrer Centrale gehen. Nimmt man ferner noch einen dritten Kreis o'', welcher mit den Kreisen o und o' dieselbe Potenzlinie hat, also dieselben nicht schneidet, so wird auch er von allen durch c und c' gehenden Kreisen rechtwinklig geschnitten werden. Nennt man alle Kreise, welche dieselbe Potenzlinie haben eine Kreisschaar, so lassen sich obige Resultate in folgender Weise in Worte fassen: Eine Kreisschaar von sich nicht schneidenden Kreisen, wird von allen Kreisen einer andern Kreisschaar rechtwinklig geschnitten, deren Centrale die Potenzlinie und deren Potenzlinie die Centrale jener ist und zwar schneiden sich alle Kreise der zweiten Schaar in den nämlichen zwei Punkten der Centrallinie der ersten, welche so liegen, daß von ihnen die Strecke zwischen den Schnittpunkten eines beliebigen Kreises der ersten Schaar mit ihrer Centrale harmonisch getheilt wird. Vgl. den folgenden Paragraphen.

Zusatz. Ist der Radius des gegebenen Kreises unendlich groß, d. h. ist statt eines Kreises eine gerade Linie gegeben, (Fig. 45) so wird obige Construction illusorisch, weil dann der Potenzpunkt auf dieser Linie selbst liegt und die von ihm aus an die Grade gezogenen Tangenten auf derselben keine bestimmte Berührungspunkte abgrenzen. In diesem Falle verlängere man die Verbindungslinie der gegebenen Punkte bis zum Schnittpunkt mit der Graden; die Potenz dieses Punktes in Bezug auf den gegebenen Kreis ist dann gleich dem Produkt seiner Entferungen von den gegebenen Punkten und daher bekannt, nämlich gleich dem geometrischen Mittel zwischen beiden Entfernungen. Beschreibt man daher von ihm aus mit dieser Größe als Radius einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebene Grade in zwei Punkten, welche mit den zwei gegebenen zwei Kreise bestimmen, die der Aufgabe genügen. Liegen die gegebenen Punkte auf verschiedenen Seiten

der Graden, so ist die erwähnte Potenz negativ und daher auch keine Tangente möglich, also auch die Aufgabe unlösbar. Liegt endlich einer der gegebenen Punkte auf der Graden, so ist auch diese Auflösung illusorisch, weil dann der erwähnte Durchschnittspunkt selbst der Berührungspunkt ist, man also nur 2 Punkte, nämlich die zwei gegebenen, zur Bestimmung des Kreises hat. Errichtet man aber in dem Berührungspunkt auf die Grade eine Senkrechte, so gibt ihr Schnittpunkt mit der in der Mitte der Verbindungslinie der zwei Punkte auf ihr errichteten Senkrechten auch noch den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher dann construirbar ist.

§. 14. Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

Erklärung 1. Schneidet man eine Schaar von Kreisen mit gemeinschaftlicher Potenzlinie durch eine Transversale, so bilden die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe oder ein Punktsystem; die zwei Schnittpunkte eines jeden Kreises mit der Transversale heißen conjugirte Punkte der Involution. Der Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Transversalen heißt Mittelpunkt der Involution; derselbe kann auch in unendlicher Ferne liegen, wenn die Transversale mit der Potenzlinie parallel ist. Kann man vom Mittelpunkte der Involution Tangenten an alle Kreise der Schaar legen, so nennt man die involutorische Punktreihe eine hyperbolische, kann man es nicht, eine elliptische. Das letztere ist nur dann möglich, wenn alle Kreise der Schaar sich schneiden und die Chordale von der Transversalen in einem Punkte getroffen wird, welcher zwischen den zwei Schnittpunkten der Kreisschaar sich befindet.

Lehrsatz 1. Wenn o (Fig. 47) den Mittelpunkt der Involution und a, a', b, b', c, c' ꝛc. Paare conjugirter Punkte bezeichnen, so sind die Produkte oa . oa', ob . ob', oc . oc', ꝛc. alle gleich einer constanten Größe, welche positiv ist für eine hyperbolische Punktreihe, negativ für eine elliptische, und Potenz der Involution heißt.

Erster Fall. Die Punktreihe sei eine hyperbolische. Legt man von o aus an alle Kreise der Schaar Tangenten, so sind diese unter sich gleich, weil o ein Punkt der Potenzlinie ist, aber auch das Quadrat p^2 einer jeden gleich einem der Produkte oa . ao', ob . ob' ꝛc., weil auch diese die Potenz von o in Bezug auf einen der Kreise darstellen.

Zweiter Fall. Die Punktreihe sei eine elliptische. Auch hier ist die Potenz des Mittelpunktes in Bezug auf alle Kreise gleich, weil o ein Punkt der Potenzlinie ist, aber negativ, weil o innerhalb eines jeden der Kreise liegt.

Zusatz 1. Der conjugirte Punkt des Mittelpunkts der Involution liegt im Unendlichen.

Zusatz 2. Beschreibt man in einer hyperbolischen Punktreihe von o aus mit einer der an die Kreise der Schaar gelegten Tangenten als Radius einen Kreis, so trifft derselbe die Transversale in zwei Punkten m und m', welche Doppelpunkte der Involution heißen; in jedem derselben fallen je zwei conjugirte Punkte zusammen oder jeder von ihnen ist sich selbst conjugirt. Da in einer elliptischen Punktreihe Tangenten vom Mittelpunkt an die Kreise der Schaar nicht möglich sind, so gibt es dort auch keine Doppelpunkte. Schneiden sich alle Kreise der Schaar und geht die Transversale durch einen ihrer Schnittpunkte, so sind die Tangenten vom Mittelpunkte gleich Null, die beiden Doppelpunkte fallen mit dem Mittelpunkte zusammen und derselbe ist conjugirter Punkt zu jedem der Punkte der Reihe. Die hyperbolische Punktreihe ist dann in eine parabolische übergegangen. Liegt der Mittelpunkt im Unendlichen, so sind alle von ihm aus an die Kreisschaar gezogenen Tangenten parallel mit Transversale und Potenzlinie und ihre Berührungspunkte liegen alle auf einer Graden, die senkrecht steht zu letzteren. Daher liegt in diesem Falle der eine Doppelpunkt in der Mitte zwischen je zwei conjugirten Punkten und der andere in unendlicher Ferne. Man hat dann eine gleichseitige hyperbolische Punktreihe.

Zusatz 3. In einem hyperbolischen Punktsystem liegen je zwei conjujugirte Punkte auf derselben Seite vom Mittelpunkte weg, weil die Potenz desselben positiv ist, im elliptischen aber, dessen Potenz negativ ist, nach verschiedenen Seiten hin. Im ersteren Falle liegen die Strecken zwischen zwei conjugirten Punkten entweder ganz ineinander oder ganz auseinander, im zweiten Falle decken sie sich theilweise. Denn wenm

$$oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = + p^2$$

und $oa \gtrless ob$, so muß $oa' \lessgtr ob'$ werden, d. h. es muß entweder das eine Punktpaar rechts, das andere links vom Mittelpunkte liegen oder es liegen beide auf derselben Seite des Mittelpunktes, schließen aber einander aus. Ist aber

$$oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = - p^2,$$

so liegen je zwei conjugirte Punkte auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts und wenn dem absoluten Werthe nach $oa \gtrless ob$, so muß dem absoluten Werthe nach $oa' \lessgtr ob'$ werden, was nur geschehen kann, wenn die Strecken zwischen je zwei conjugirten Punkten sich theilweise decken.

Zusatz 4. In einer hyperbolischen Punktreihe werden die Strecken je zweier Punktpaare durch die Doppelpunkte harmonisch getheilt, wie man aus

der Relation $p^2 = oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob'$ 2c. mit Zuhülfnahme von §. 5, 3 erkennt.

Zusatz 5. Aus den Relationen

$$p^2 = oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = \text{2c. und}$$
$$-\,p^2 = oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = \text{2c.}$$

ergibt sich, daß, wenn der Mittelpunkt der Involution, ihre Potenz und ein Punkt derselben bekannt sind, der conjugirte Punkt unzweideutig gefunden wird, d. h., daß es zu jedem Punkte der Involution einen, aber auch nur einen ihm conjugirten gibt.

Lehrsatz 2. (Umkehrung des vorigen.) **Wenn auf einer Graden die Punktpaare a,a′, b,b′, c,c′ 2c. so gelegen sind, daß das Produkt der Entfernungen der Punkte eines Paares von einem auf demselben Grade liegenden Punkte o constant ist, d. h. daß**

$$\pm\, p^2 = oa \,.\, oa' \; ob \,.\, ob' = oc \,.\, oc' = \text{2c.}$$

so bilden die Punktpaare eine involutorische Punktreihe, deren Mittelpunkt o ist.

Denn beschreibt man über den Strecken aa′, bb′, cc′, 2c. als Durchmessern Kreise, so hat der Punkt o in Bezug auf alle diese Kreise gleiche Potenz; die Potenzlinie je zweier dieser Kreise muß also durch diesen Punkt gehen und außerdem auf ihrer Centrale senkrecht stehen. Da nun letztere allen Kreisen gemeinschaftlich ist, so haben dieselben alle die nämliche Potenzlinie.

Aufgabe 1. Wenn 2 Punktpaare einer Involution und der eine Punkt des dritten Paares gegeben sind, dazu den conjugirten zu finden.

Ist die Involution eine hyperbolische, so kann man die Aufgabe auf die dritte Aufgabe des vorigen Paragraphen zurückführen. Man suche nämlich zuerst die Doppelpunkte, welche nach Zusatz 4 des vorigen Lehrsatzes die Strecken der gegebenen Punktpaare harmonisch theilen. Hat man die Doppelpunkte, so kennt man auch den Mittelpunkt und kann mit Hülfe der Relation $oc \,.\, oc' = p^2$ zu c den gesuchten Punkt c′ bestimmen. Allgemeiner und auch für die elliptische Punktreihe gültig ist folgende Lösung:

Man lege durch einen beliebigen Punkt p der Ebene und die Punkte a und a′ einen Kreis, ebenso einen zweiten durch p und die Punkte b und b′. Beide Kreise schneiden sich noch in einem zweiten Punkte p′. Die Verbindungslinie von p und p′ gibt durch ihren Schnittpunkt mit dem Träger der Punktreihe den Mittelpunkt der Involution. Sind von ihm aus Tangenten an die Kreise möglich, d. h. ist die Punktreihe eine hyperbolische, so trifft ein von ihm aus mit einer dieser Tangenten als Radius beschriebener Kreis den Träger der Punktreihe in den Doppelpunkten der Involution. Legt man

nun einen 3ten Kreis durch c und die Punkte p und p′, so ist sein zweiter Durchschnittspunkt mit dem Träger der Punktreihe der verlangte Punkt c′.

Anmerkung. Aus der Lösung dieser Aufgabe geht noch hervor, daß alle Punktpaare einer involutorischer Punktreihe gefunden werden können, d. h. daß die Punktreihe vollständig bestimmt ist, sobald zwei Punktpaare derselben gegeben sind.

Lehrsatz 2. Wenn 3 Punktpaare a,a′, b,b′, c,c′ eine Involution bilden, so finden folgende vier Gleichungen statt, und umgekehrt jede dieser vier Gleichungen bedingt die Involution und hat die drei übrigen Gleichungen zur Folge.

$$1)\quad \frac{ab' \, . \, c'a' \, . \, bc}{b'c' \, . \, a'b \, . \, ca} = -1$$

$$2)\quad \frac{bc' \, . \, a'b' \, . \, ca}{c'a' \, . \, b'c \, . \, ab} = -1$$

$$3)\quad \frac{ca' \, . \, b'c' \, . \, ab}{a'b' \, . \, c'a \, . \, bc} = -1$$

$$4)\quad \frac{ab' \, . \, ca' \, . \, bc'}{b'c \, . \, a'b \, . \, c'a} = -1$$

Die Potenz der Involution sei vorerst positiv. Dann ist

$$oa = \frac{p^2}{ob} \text{ und } ob' = \frac{p^2}{ob}, \text{ also}$$

$$ab' = \frac{p^2}{oa'} - \frac{p^2}{oa'} = \frac{p^2\,(oa' - ob)}{ob \, . \, oa'} = \frac{p^2 \, . \, ba'}{ob \, . \, oa,}$$

Ebenso ist

$$oc' = \frac{p'}{oc} \text{ und } oa' = \frac{p^2}{oa'}, \text{ also}$$

$$c'a' = \frac{p^2}{oa} - \frac{p^2}{oc} = \frac{p^2\,(oc - oa)}{oa \, . \, oc} = \frac{p^2 \, . \, ac}{oc \, . \, oa},$$

$$\text{ferner } ob = \frac{p^2}{ob'} \text{ und } oc = \frac{p^2}{oc'}, \text{ also}$$

$$bc = \frac{p^2}{oc'} - \frac{p^2}{ob'} = \frac{p^2\,(ob' - oc')}{oc' \, . \, ob'} = \frac{p^2 \, . \, c'b'}{oc' \, . \, ob'}$$

Multiplicirt man die Ausdrücke für ab′, c′a′, bc, so erhält man

$$ab' \, . \, c'a' \, . \, bc = \frac{p^6 \, . \, a'b \, . \, ca \, . \, b'c'}{oa \, . \, oa' \, . \, ob \, . \, ob' \, . \, oc \, . \, oc'} \text{ oder, weil}$$

$$p^2 = oa \, . \, oa' = ob \, . \, ob' = oc \, . \, oc'$$

$$ab' \, . \, c'a' \, . \, bc = a'b \, . \, ca \, . \, b'c',$$

was mit Berücksichtigung der nothwendigen Zeichenveränderungen die erste der obigen Gleichungen ergibt. Wäre die Potenz negativ gewesen, so würde man in derselben Weise verfahrend dasselbe Resultat erhalten haben. Da aber in einer Involution jeder Punkt eines Punktpaares in der nämlichen Beziehung zu den übrigen Paaren steht, wie sein conjugirter, so kann man

in der eben gefundenen Relation a mit a', b mit b' und c mit c' vertauschen und umgekehrt, und erhält dann, abgesehen von der Stellung der Faktoren, die drei noch übrigen Relationen, von denen namentlich die letzte bemerkenswerth ist, weil sie ganz dieselbe Gestalt hat wie die Relation des Menelaus. Umgekehrt ist eine der obigen vier Relationen erfüllt und gehörte nicht der Punkt c' als conjugirter Punkt zu c' sondern c'', so hätte man auch noch:

$$\frac{ab' \cdot ca' \cdot bc''}{b'c \cdot a'b \cdot c''a} = -1$$

und es ließe sich wie beim Menelaus'schen Lehrsatze zeigen, daß c'' mit c' zusammenfallen müsse.

Zusatz. Combinirt man die Gleichungen 1—3 nach einander mit der 4ten, so ergeben sich noch folgende drei Relationen, welche ebenfalls an der Stelle jener das Vorhandensein einer Involution anzeigen:

$$1)\quad \frac{ca \cdot ca'}{c'a' \cdot c'a} = \frac{cb \cdot cb'}{c'b' \cdot c'b}$$

$$2)\quad \frac{bc \cdot bc'}{b'c' \cdot b'c} = \frac{ba \cdot ba'}{b'a' \cdot b'a}$$

$$3)\quad \frac{ab \cdot ab'}{a'b' \cdot a'b} = \frac{ac \cdot ac'}{a'c' \cdot a'c}$$

Lehrsatz 3. Die Schnittpunkte einer Transversale mit einem Kreise und je zwei Paaren gegenüberliegender Seiten eines in denselben beschriebenen vollständigen Vierecks bilden je eine Involution von drei Punktpaaren.

Man wende auf das Dreieck qbb' (Fig. 48.) weimal hintereinander den Carnot'schen Lehrsatz an, indem man es einmal durch den Kreis, das anderemal durch das Linienpaar sm, sp schneiden läßt. Dadurch erhält man:

$$\frac{qm \cdot qp \cdot ba \cdot ba' \cdot b'o \cdot b'n}{qn \cdot qo \cdot b'a' \cdot b'a \cdot bp \cdot bm} = 1.$$

$$\frac{qm \cdot qp \cdot bc \cdot bc' \cdot b'o \cdot b'n}{qn \cdot qo \cdot b'c' \cdot b'c \cdot bp \cdot bm} = 1$$

Die Combination dieser Gleichungen ergibt:

$$\frac{ba \cdot ba'}{b'a' \cdot b'a} = \frac{bc \cdot bc'}{b'c' \cdot b'c}$$

was die zweite Gleichung des Zusatzes zum vorigen Lehrsatz ist und, wie dort gezeigt wurde, das Vorhandensein einer Involution zwischen den Punktpaaren a,a', b,b', c,c' anzeigt. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch a,a', b,b', d,d' und a,a', c,c', d,d' Involutionen bilden.

Zusatz. Aus dem Umstande, daß sowohl a,a', b,b', c,c', als auch a,a', b,b', d,d' und a,a', c,c', d,d' Involutionen bilden, läßt sich schon an und für sich schließen, daß auch die drei Punktpaare b,b', c,c', d,d' in Involution sind. Das nämliche Resultat ergibt sich auch aus der Betrachtung, daß dieser Lehrsatz, wie der Carnot'sche, aus welchem er hervorgegangen ist,

projectivisch sein muß und also auch dann gilt, wenn die 4 Ecken des Vierecks statt auf einem Kreise auf zwei sich schneidenden Graden liegen. In der That wendet man auf das Dreieck qbb' zweimal hintereinander den Carnot'schen Lehrsatz an, einmal in Bezug auf das Linienpaar mo, np, das andere Mal in Bezug auf das Linienpaar sm, sp, so ergibt sich:

$$\frac{qm \,.\, qp \,.\, bd \,.\, bd' \,.\, b'o \,.\, b'n}{qn \,.\, qo \,.\, b'd' \,.\, b'd \,.\, bp \,.\, bm} = 1$$

$$\frac{qm \,.\, qp \,.\, bc \,.\, bc' \,.\, b'o \,.\, b'n}{qn \,.\, qo \,.\, b'c' \,.\, b'c \,.\, bp \,.\, bm} = 1$$

woraus folgt:

$$\frac{bd \,.\, bd'}{b'd' \,.\, b'd} = \frac{bc \,.\, bc'}{b'c' \,.\, b'c}$$

Man kann also auch den Satz aufstellen:

Die Schnittpunkte einer Transversalen mit den drei Paaren gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks bilden eine Involution von drei Punktpaaren.

Beide Fälle umfaßt der folgende Satz:

Die Schnittpunkte einer Transversale mit einem Kreise und den drei Paaren gegenüberliegender Seiten eines in denselben beschriebenen vollständigen Viereckes bilden eine involutorische Punktreihe von vier Punktpaaren.

Anmerkung. Dieser Satz ist von Desargues zuerst veröffentlicht worden, weßhalb er auch seinen Namen trägt.

Aufgabe 2. Es sind zwei Punktpaare einer Involution und vom dritten Paare der eine Punkt gegeben. Man soll den diesem conjugirten Punkt und zwar bloß mit Hülfe des Lineals suchen.

Die Auflösung ergibt sich aus dem Zusatz zum vorigen Lehrsatz. Seien die beiden Punktpaare b,b', c,c' (Fig. 48.) und vom dritten der Punkt d gegeben, so lege man durch b,b' und d je eine Grade, verbinde die Schnittpunkte p und n der dritten Grade mit den zwei ersten bezüglich mit c' und c durch Grade, die sich in s schneiden, verbinde s mit n durch eine Grade und verlängere dieselbe, bis sie bp in m schneidet, so bestimmt die Verbindungslinie von m mit dem Schnittpunkt o von b'n und ps auf dem Träger der Punktreihe den verlangten Punkt d'.

Erklärung 2. Verbindet man einen Punkt der Ebene mit allen Punkten einer involutorischen Punktreihe durch Grade, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel. Jede dieser Graden heißt ein Strahl, der Punkt, von dem sie ausgehen, Scheitel. Strahlen, die durch conjugirte Punkte gehen, heißen conjugirte Strahlen.

Lehrsatz 4. Ein involutorisches Strahlenbüschel wird von jeder Transversale in einer involutorischen Punktreihe geschnitten.

Es sei (Fig. 49.) s der Scheitel eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die involutorische Punktreihe a, a′, b, b′, c, c′ gehen; dann muß gezeigt werden, daß auch die Punkte $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, welche auf der Transversale liegen, in Involution sind. Dies geschieht ganz in der Weise, wie dies §. 6, Lehrsatz 1 für das harmonische Strahlenbüschel gelehrt worden ist. Fällt man nämlich vom Scheitel s auf den Träger der erzeugenden Punktreihe und die Transversale die Lothe p und p′, so hat man

$$\frac{\triangle\, sab'}{\triangle\, s\alpha\beta'} = \frac{sa\,.\,sb'}{s\alpha\,.\,s\beta'} = \frac{p\,.\,ab'}{p'\,.\,\alpha\beta'},\text{ woraus folgt}$$

$$\frac{ab'}{\alpha\beta'} = \frac{p'\,.\,sa\,.\,sb'}{p\,.\,s\alpha\,.\,s\beta'}$$

Ebenso ist

$$\frac{b'c}{\beta'\gamma} = \frac{p'\,.\,sb'\,.\,sc}{p\,.\,s\beta'\,.\,s\gamma}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{ab'}{b'c} = \frac{\alpha\beta'}{\beta'\gamma}\cdot\frac{sa\,.\,s\gamma}{s\alpha\,.\,sc}$$

Ebenso erhält man

$$\frac{ca'}{a'b} = \frac{\gamma\alpha'}{\alpha'\beta}\cdot\frac{sc\,.\,s\beta}{s\gamma\,.\,sb}$$

und

$$\frac{bc'}{c'a} = \frac{\beta\gamma'}{\gamma'\alpha}\cdot\frac{sb\,.\,s\alpha}{s\beta\,.\,sa}$$

Multiplicirt man die drei letzten Gleichungen, so kommt:

$$\frac{ab'\,.\,ca'\,.\,bc'}{b'c\,.\,a'b\,.\,c'a} = \frac{\alpha\beta'\,.\,\gamma\alpha'\,.\,\beta\gamma'}{\beta'\gamma\,.\,\alpha'\beta\,.\,\gamma'\alpha}$$

und da die linke Seite dieser Gleichung in Folge der Voraussetzung nach Lehrsatz 2, Gl. 4 dieses Paragraphen gleich — 1 ist, so ist es auch die rechte und es sind daher nach der Umkehrung dieses Satzes die Punkte $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, γ, γ' in Involution.

Zusatz 1. Wenn die Punktreihe a, a′, b, b′, c, c′ Doppelpunkte m, m′ hat, so hat der Erklärung und dem Lehrsatz zufolge auch die Punktreihe $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ Doppelpunkte μ, μ' und zwar liegen dieselben auf den Strahlen sm, sm′, welche wie die Doppelpunkte sich selbst conjugirt sind und deswegen auch Doppelstrahlen des Involutionsbüschels heißen. Dieselben sind natürlich nur dann vorhanden, wenn das Strahlenbüschel auf einer Transversale eine hyperbolische Punktreihe erzeugt; in diesem Falle heißt das Strahlenbüschel ein hyperbolisches. Ist aber die erzeugende Punktreihe eine elliptische, so ist auch das Strahlenbüschel ein elliptisches und

hat keine Doppelstrahlen. Fallen beide Doppelstrahlen in einen einzigen Strahl zusammen, so erhält man ein parabolisches Strahlenbüschel; dieser Strahl ist dann conjugirt zu jedem Strahl des Büschels. Errichtet man im Doppelpunkte einer gleichseitigen hyperbolischen Punktreihe eine Senkrechte und zieht von einem Punkte derselben Strahlen nach den conjugirten Punkten, die in gleicher Entfernung rechts und links vom Doppelpunkte liegen, so bilden diese mit der Senkrechten, welche ein Doppelstrahl ist, je gleiche Winkel, und da der andere Doppelpunkt im Unendlichen liegt, so muß der zweite Doppelstrahl parallel mit dem Träger der Punktreihe und also senkrecht auf dem ersten sein. Ein gleichseitiges hyperbolisches Strahlenbüschel charakterisirt sich also dadurch, daß seine zwei Doppelstrahlen auf einander senkrecht stehen und daß die Winkel conjugirter Strahlen mit einem derselben gleich sind.

Zusatz 2. Wenn o den Mittelpunkt der Punktreihe a, a', b, b,' c, c' bezeichnet, so trifft der Strahl so den Träger der Punktreihe α, α', β, β', γ, γ' nicht im Mittelpunkte a derselben, wenn der Träger der zweiten Punktreihe nicht parallel ist mit dem der ersten. Da nämlich der conjugirte Punkt zu o sowohl wie der zu ω im Unendlichen liegt, so würden, wenn ω auf so läge zu sωo zwei conjugirte Strahlen gehören, von denen der eine parallel mit dem Träger der ersten, der andere parallel mit dem der zweiten Punktreihe wäre, was der Erklärung des Strahlenbüschels widerspricht. Ein durch den Mittelpunkt der Punktreihe gehender Strahl ist also nicht charakteristisch für das Strahlenbüschel, da er sich für jede Transversale ändern würde. Dagegen gibt es in jedem Involutionsbüschel ein Paar conjugirte Strahlen, welche aufeinander senkrecht stehen. Für das hyperbolische Büschel läßt sich dies leicht erweisen. Schneidet man nämlich dasselbe durch eine Transversale, welche gleiche Stücke von den Doppelstrahlen abschneidet und fällt vom Scheitel auf die Basis des dadurch entstehenden gleichschenkligen Dreiecks eine Senkrechte, so ist der Fußpunkt desselben der Mittelpunkt der auf der Transversale entstehenden Punktreihe, und da der conjugirte Punkt derselben im Unendlichen liegt, so gibt eine Parallele zur Transversale den conjugirten Strahl zu dem auf derselben senkrechten. Diese beiden Strahlen stehen also aufeinander senkrecht und halbiren die Winkel der beiden Doppelstrahlen. Daß es aber überhaupt in jedem, also auch in einem elliptischen Strahlenbüschel ein solches Paar senkrecht aufeinander stehender conjugirter Strahlen gibt, beweist man in folgender Weise. Man schneide das Strahlenbüschel durch eine Transversale und lege durch jedes Paar conjugirter Punkte und den Scheitel einen Kreis; alle diese Kreise schneiden sich in den nämlichen zwei Punkten, nämlich außer in dem Scheitel noch in einem zweiten Punkte. Man errichte nun im Mittelpunkte der Verbindungslinie derselben (der gemeinschaftlichen Potenzlinie oder Chordale der Kreise) eine Senkrechte, verlängere sie bis zum Schnittpunkt mit der Transversalen und beschreibe von ihm aus einen Kreis, der durch den Scheitel geht. Derselbe schneidet auf der Transversale zwei Punkte

ab, die, mit dem Scheitel verbunden, zwei rechtwinklig aufeinanderstehende Strahlen erzeugen; denn der Winkel derselben ist ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser. Dieses merkwürdige Strahlenpaar nennt man die Axen des Strahlenbüschels.

Gibt es in einem Strahlenbüschel außer dem Axenpaar noch ein anderes Paar senkrecht aufeinander stehender conjugirter Strahlen, so stehen alle conjugirten Strahlenpaare desselben aufeinander senkrecht. In der That legt man durch den Scheitel eines solchen Strahlenbüschels und die Schnittpunkte eines jeden der beiden Paare rechtwinklig aufeinander stehender conjugirter Strahlen mit einer Transversale je einen Kreis, so steht die Potenzlinie der beiden so entstehenden Kreise auf der Transversale senkrecht und wird durch dieselbe halbirt; auch schneiden sich die beiden Kreise außer im Scheitel noch in einem zweiten Punkte. Legt man durch letzteren und den Scheitel noch weitere Kreise, so geben ihre Schnittpunkte mit der Transversale, mit dem Scheitel verbunden, je zwei conjugirte Strahlen, deren Winkel jedesmal ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser, also ein Rechter ist. Ein solches Strahlenbüschel hat keine Doppelpunkte und ist also ein elliptisches; es führt den besonderen Namen circuläres Strahlenbüschel.

Zusatz 3. In einem hyperbolischen Punktsystem wird der Winkel zwischen 2 conjugirten Strahlen durch die Doppelstrahlen harmonisch getheilt. Der Beweis ergibt sich aus dem Zusatz 4 des vorigen Paragraphen.

Lehrsatz 5. Die Tangenten von einem Punkte an einen Kreis und die Verbindungslinie dieses Punktes mit je zwei Paaren gegenüberliegender Ecken eines um den Kreis beschriebenen vollständigen Vierseits bilden je ein Involutionsbüschel von drei Strahlenpaaren. (Fig. 50.)

Ist r der Punkt, von dem aus die Tangenten an den Kreis, der dem Vierseit dp, do, d′m, d′p eingeschrieben ist, gezogen sind, so wende man auf das Dreieck rdd′ zweimal hintereinander den Chasles'schen Lehrsatz an, indem man einmal von seinen Eckpunkten aus Tangenten an den Kreis legt, das andere Mal dieselben mit den Punkten n und p verbindet. Dadurch erhält man:

$$\frac{r\delta \,.\, r\delta' \,.\, db \,.\, db' \,.\, d'\varkappa \,.\, d\varkappa'}{r\varkappa \,.\, r\varkappa' \,.\, d'b' \,.\, d'b \,.\, d\delta \,.\, d\delta'} = 1$$

$$\frac{r\delta \,.\, r\delta' \,.\, da \,.\, da' \,.\, d\varkappa \,.\, d\varkappa'}{r\varkappa \,.\, r\varkappa' \,.\, d'a' \,.\, d'a \,.\, d\delta \,.\, d\delta'} = 1$$

Die Combination dieser Gleichungen ergibt:

$$\frac{db \,.\, db'}{d'b' \,.\, d'b} = \frac{da \,.\, da'}{d'a' \,.\, d'a'}$$

woraus das Vorhandensein einer Involution zwischen den Punktpaaren d, d′, a, a′, b, b′, folgt. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß d, d′, c,

c', b, b', und a, a', c, c', b, b', in Involution sind. Daraus folgt aber auch die Involution der entsprechenden Strahlenbüschel mit dem Scheitel r.

Zusatz 1. Aus dem Umstande, daß sowohl die auf d, d', a, a', b, b', als auch auf d, d', c, c', b, b' und a, a', c, c', b, b' stehenden Strahlenbüschel Involutionen bilden, läßt sich schon an und für sich schließen, daß auch die drei Strahlenpaare, welche durch a, a', c, c', d, d' gehen, in Involution sind. Das nämliche Resultat ergibt sich aus der Betrachtung, daß dieser Lehrsatz, wie der Chasles'sche, aus welchem er hervorgegangen ist, projectivisch sein muß und also auch dann gilt, wenn die vier Seiten des Vierseits, statt einen Kreis zu berühren, durch zwei getrenntliegende Punkte gehen. In der That, wendet man auf das Dreieck rdd' den Chasles'schen Lehrsatz zweimal hintereinander an, einmal in Bezug auf die Punkte m, o, das andere Mal in Bezug auf die Punkte n, p, so ergibt sich:

$$\frac{r\delta \cdot r\delta' \cdot dc \cdot dc' \cdot d\varkappa \cdot d\varkappa'}{r\varkappa \cdot r\varkappa' \cdot d'c' \cdot d'c \cdot d\delta \cdot d\delta'} = 1$$

$$\frac{r\delta \cdot r\delta' \cdot da \cdot da' \cdot d\varkappa \cdot d\varkappa'}{r\varkappa \cdot r\varkappa' \cdot d'a' \cdot d'a \cdot d\delta \cdot d\delta'} = 1$$

woraus folgt:

$$\frac{dc \cdot dc'}{d'c' \cdot d'c} = \frac{da \cdot da'}{d'a' \cdot d'a}$$

Man kann also den Satz aufstellen:

Die Verbindungslinien eines Punktes mit den drei Paaren gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits bilden eine Involution von Strahlen.

Beide Fälle umfaßt der folgende Satz:

Die Tangenten von einem Punkte an einen Kreis und die Verbindungslinien desselben mit den drei Paaren gegenüberliegender Ecken eines um denselben beschriebenen vollständigen Vierseits bilden ein involutorisches Strahlenbüschel von vier Strahlenpaaren.

Aufgabe 3. Es sind zwei Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels und vom dritten Paare der eine Strahl gegeben. Man soll den diesem conjugirten Strahl und zwar bloß mit Hülfe des Lineals suchen.

Die Auflösung ergibt sich aus dem Zusatz zum vorigen Lehrsatz. Sind die beiden Strahlenpaare ra, ra' und rc, rc' und vom dritten der Strahl rd gegeben, so nehme man beliebig auf ra, ra', rd, bezüglich die Punkte p, n und d an, verbinde d mit p und n durch Grade, welche rc und rc' bezüglich in den Punkten m und o schneiden, die Verbindungslinien von mn und po schneiden sich dann in einem Punkte d', welcher mit r verbunden den verlangten conjugirten Strahl rd' bestimmt.

§. 15. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

Erklärung und Lehrsatz. Verbindet man in zwei Kreisen die Endpunkte von je zwei parallelen Halbmessern mit einander durch Grade, so gehen diese alle durch einen von zwei Punkten der Centrallinie beider Kreise, durch den einen, wenn die parallelen Halbmesser nach derselben Richtung von der Centrale aus liegen, durch den zweiten, wenn sie in verschiedener Richtung liegen. Der erste Punkt heißt der äußere, der zweite der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. (Fig. 51.)

Denn bezeichnet man den Halbmesser des größeren der beiden Kreise mit r, den des kleineren mit r′ und die Entfernung ihrer Mittelpunkte mit c, so ist in den ähnlichen Dreiecken Abo und A′b′o′

$$\frac{oA}{o'A} = \frac{ob}{o'b'} = \frac{r}{r'}, \text{ woraus}$$

$$\frac{oo'}{o'A} = \frac{r - r'}{r'} \text{ oder}$$

$$1)\ o'A = \frac{cr'}{r - r'} \text{ und da } oA = c + o'A \text{ ist}$$

$$2)\ oA = \frac{cr}{r - r'},$$

Ausdrücke, die von der Lage der parallelen Halbmesser ganz unabhängig sind und deshalb für alle Lagen derselben gelten. Ebenso folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Ibo und Iβ′o′

$$\frac{oI}{Io'} = \frac{ob}{o'\beta'} = \frac{r}{r'}, \text{ woraus}$$

$$\frac{oo'}{Io'} = \frac{r + r'}{r'} \text{ oder}$$

$$3)\ Io' = \frac{cr'}{r + r'} \text{ und da } oI = c - Io' \text{ ist}$$

$$4)\ oI = \frac{cr}{r + r'},$$

Ausdrücke, welche aus dem nämlichen Grunde wie vorhin für sämmtliche Lagen der parallelen Halbmesser gelten.

Zusatz 1. Da die inneren und äußeren gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise zu gleicher Zeit in den Endpunkten der Halbmesser beider Kreise auf denselben senkrecht stehen, so gehen sie durch die Endpunkte paralleler Halbmesser und in Folge dessen durch die Aehnlichkeitspunkte, die äußeren Tangenten durch den äußeren, die inneren durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Zusatz 2. Aus den Gleichungen 1—4 des Lehrsatzes folgt:

$$\frac{oI}{Io'} = \frac{oA}{o'A} = -\frac{oA}{Ao'}$$

d. h. die Centrallinie beider Kreise wird durch den inneren und äußeren Aehnlichkeitspunkt harmonisch getheilt.

Zusatz 3. Die Lage der Aehnlichkeitspunkte ändert sich, wenn die Kreise ihre Lage ändern. Vorausgesetzt, c sei immer positiv, d. h. o' liege immer in derselben Richtung von o weg und r sei größer als r', ergeben sich aus den Gleichungen 1—4 des Lehrsatzes folgende Folgerungen:

Die Ausdrücke Io' und oI, o'A und oA ändern nie ihr Zeichen, wie auch c abnehmen mag, daher liegt der innere Aehnlichkeitspunkt immer zwischen den Mittelpunkten beider Kreise und zwar näher dem Mittelpunkt des kleineren als dem des größeren, der äußere aber in der Richtung vom Mittelpunkt des größeren zu dem des kleineren auf der Verlängerung der Centralen.

Um die Lage des äußeren Aehnlichkeitspunktes noch näher zu bestimmen, setze man $c = r + r' + \delta$, wo δ den Theil der Centrallinie bedeutet, welcher nicht in den Flächenraum eines der beiden Kreise fällt; dann nimmt Gleichung 1, die Form an:

$$o'A = r' + \frac{r'(2r' + \delta)}{r - r'}.$$

So lange nun δ positiv ist, d. h. so lange die beiden Kreise auseinanderliegen, und auch so lange es negativ, der absolute Werth von δ aber kleiner als $2r'$ ist, d. h. so lange die Kreise sich schneiden, ist $o'A > r'$ d. h. der äußere Aehnlichkeitspunkt liegt außerhalb beider Kreise. Er liegt in ihrem Berührungspunkt, wenn sie sich von innen berühren; denn dann ist $\delta = -2r'$. In ähnlicher Weise fällt auch der innere Aehnlichkeitspunkt in den Berührungspunkt, wenn die Kreise sich von außen berühren, wie sich aus 3, ergibt, wenn man $c = r + r'$ setzt. Ist in dem obigen Ausdruck für o'A δ negativ und zugleich sein absoluter Werth größer als $2r'$, d. h. liegen die beiden Kreise in einander, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunkt im Innern des kleineren, also auch des größeren Kreises, weil dann $o'A < r'$. (siehe Fig. 52.) Sind endlich die Kreise concentrisch, so folgt aus den Ausdrücken 1—4 des Lehrsatzes, weil jetzt $c = o$ ist, daß innerer und äußerer Aehnlichkeitspunkt zugleich in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt fallen.

Zusatz 4. Auch mit Veränderung der Größe der Radien der Kreise ändert sich die Lage der Aehnlichkeitspunkte. Sind beide Radien r und r gleich' so ist $o'A = oA = \infty$ und $Io' = oI = \frac{1}{2}c$, d. h. der äußere Aehnlichkeitspunkt liegt im Unendlichen, der innere in der Mitte der Centrallinie. Ist $r' = o$, d. h. geht der eine Kreis in einen Punkt über, so ist nach 1 und 3 $o'A = Io' = r'$ d. h. der innere und äußere Aehnlichkeitskeitspunkt fällt mit dem gegebenen Punkt zusammen. Ist $r = \infty$ d. h. geht der eine Kreis in eine Grade über, so ist auch $c = \infty$ und deshalb

$o'A = Io' = r'$ d. h. der innere und äußere Aehnlichkeitspunkt fallen in die Schnittpunkte der Senkrechten vom Mittelpunkt des Kreises auf die gegebenen Grade mit diesem Kreise und zwar liegt der innere der Graden am nächsten. Hat man 2 Punkte, so kann man einen beliebigen derselben zugleich als inneren und äußeren Aehnlichkeitspunkt betrachten. Hat man zwei Grade, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte in's Unendliche. Für einen Punkt und eine Grade liegen beide Aehnlichkeitspunkte in dem Punkte selbst.

Erklärung 2. Jede Secante, die man von einem Aehnlichkeitspunkt durch beide Kreise zieht, heißt *Aehnlichkeitsstrahl* und zwar *innerer* oder *äußerer*, je nachdem er vom inneren oder äußeren Aehnlichkeitspunkt ausgeht.

Lehrsatz 2. Jeder Aehnlichkeitsstrahl schneidet von beiden Kreisen ähnliche Bögen ab.

Denn verbindet man (Fig. 51) o mit a und o' mit a', so erhält man 2 gleichschenklige Dreiecke aob und a'o'b'. In diesen ist $\sphericalangle b = \sphericalangle b'$ wegen des Parallelismus von ob und o'b', folglich auch $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$. Daher sind die Dreiecke ähnlich und $\sphericalangle aob = \sphericalangle a'o'b'$.

Zusatz. Aus der Gleichheit der Winkel a und a' folgt weiter, dbß oa und o'a' parallel sind. Jeder Aehnlichkeitsstrahl geht daher durch die Endpunkte von *zwei* Paaren paralleler Halbmesser.

Erklärung 3. Von den vier Punkten, welche jeder Aehnlichkeitsstrahl auf zwei Kreisen bestimmt, nennt man je zwei, die nicht auf demselben Kreise liegen und zu nichtparallelen Halbmessern gehören, *potenzhaltende Punkte*. Auf jedem Aehnlichkeitsstrahl liegen also 2 Paare solcher Punkte.

Lehrsatz 3. Das Produkt der Entfernungen je zweier potenzhaltender Punkte vom Aehnlichkeitspunkt ist constant und zwar gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Potenzen des Aehnlichkeitspunkts in Bezug auf beide Kreise, mögen die verglichenen Paare auf demselben Aehnlichkeitsstrahl oder auf verschiedenen Aehnlichkeitsstrahlen liegen.

Denn für denselben Aehnlichkeitsstrahl ist (Fig. 51.)

$$\frac{Aa}{Aa'} = \frac{r}{r'} \text{ und } \frac{Ab}{Ab'} = \frac{r}{r'},$$

woraus: $Aa \,.\, Ab' = Ab \,.\, Aa'$. (1)

Bezeichnet man die Potenz des Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf den ersten Kreis mit p^2, in Bezug auf den zweiten mit p'^2, so ist ferner:

$$Aa \,.\, Ab = p^2 \text{ und } Aa' \,.\, Ab' = p'^2$$

und durch Multiplication

$$Aa \,.\, Ab' \,.\, Ab \,.\, Aa' = p^2 \,.\, p'^2$$

oder wegen (1):

$$Aa^2 \,.\, Ab'^2 = p^2 \,.\, p'^2, \text{ folglich}$$

$$Aa \,.\, Ab' = Aa' \,.\, Ab = p \,.\, p' \quad (2)$$

Da aber das Produkt $p \,.\, p'$ von der Lage des Aehnlichkeitsstrahls ganz unabhängig ist, so ist auch für jeden andern Aehnlichkeitsstrahl das Produkt der Entfernungen je zweier potenzhaltender Punkte vom Aehnlichkeitspunkt constant $= pp'$.

Erklärung und Lehrsatz 4. Die sechs Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen zu je drei auf vier graden Linien und zwar liegen auf der einen, welche man die äußere Aehnlichkeitsaxe nennt, die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte, auf den drei übrigen, welche innere Aehnlichkeitsaxen heißen, ein äußerer Aehnlichkeitspunkt und diejenigen zwei inneren, welche nicht zu demselben Kreispaar wie dieser gehören.

Denn wenn (Fig. 53.) A und I die Aehnlichkeitspunkte der Kreise o und o″, A′, I′ die von o und o′, A″, I″ die von o′ und o″ beziehen, so ist nach dem ersten Lehrsatz:

$$\frac{Ao}{Ao''} = -\frac{r}{r''},\ \frac{o''A''}{A''o'} = -\frac{r''}{r'},\ \frac{o'A'}{A'o} = -\frac{r'}{r},$$

daher durch Multiplikation:

$$\frac{oA \,.\, o''A'' \,.\, o'A'}{Ao'' \,.\, A''o' \,.\, A'o} = -1.$$

Nach dem umgekehrten Menelaus'schen Lehrsatz, angewandt auf das Dreieck oo′o″, liegen also A, A′, A″ in grader Linie.

Ferner ist

$$\frac{oI}{Io''} = \frac{r}{r''},\ \frac{o''I''}{I''o'} = \frac{r''}{r'},\ \frac{o'A'}{A'o} = -\frac{r'}{r}$$

Daher durch Multiplication:

$$\frac{oI \,.\, o''I'' \,.\, o'A'}{Io'' \,.\, I''o' \,.\, A'o} = -1;$$

also liegen auch I, I″ und A′ auf einer Graden.

In der nämlichen Weise beweist man, daß I, I′, A″ und I′ I″, A auf einer Graden liegen.

Zusatz. Die vier Aehnlichkeitsaxen bilden ein vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalpunkte die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind. Letzteres geht daraus hervor, daß der Mittelpunkt o sowohl auf der Verbindungs-

linie von A und I, als auch von A' und I' liegen muß 2c. (vgl. Fig. 53). In der That wird dann auch, wie es der Zusatz 2 zu Lehrsatz 1 verlangt, die Entfernung je zweier Mittelpunkte durch den zugehörigen äußeren und inneren Aehnlichkeitspunkt harmonisch getheilt nach Lehrsatz 1 des §. 7.

Erklärung 5. Ein Kreis berührt zwei andere gleichartig, wenn er sie beide ausschließt oder beide einschließt, oder den einen einschließt, den andern von innen berührt, ungleichartig, wenn er den einen ausschließt, den andern einschließt oder von innen berührt.

Lehrsatz 5. Wenn ein Kreis zwei andere gleichartig berührt, so liegen seine Berührungspunkte auf einem äußeren Aehnlichkeitsstrahl derselben; wenn er sie ungleichartig berührt, auf einem inneren Aehnlichkeitsstrahl derselben; in beiden Fällen sind die Berührungspunkte potenzhaltende Punkte.

Erster Fall. Die Berührungspunkte des Kreises K_3 mit den zwei anderen Kreisen K_1, K_2 sind, wenn er sie einschließt, oder eingeschlossen wird, die äußeren, wenn er sie ausschließt, die inneren Aehnlichkeitspunkte desselben in Beziehung zu denselben. Diese müssen aber nach dem vorigen Lehrsatze mit dem äußeren Aehnlichkeitspunkt von K_1 und K_2 in grader Linie liegen. Daher ist die grade Linie, auf welcher die Berührungspunkte sich befinden, ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise K_1 und K_2.

Zweiter Fall. Schließt der Berührungskreis K_3 den einen der Kreise K_1, und K_2 aus, den anderen ein, oder wird von ihm eingeschlossen, so ist sein Berührungspunkt mit dem ersten der innere, mit dem zweiten der äußere Aehnlichkeitspunkt in Bezug auf denselben. Diese müssen aber nach dem vorigen Lehrsatze mit dem inneren Aehnlichkeitspunkt von K_1 und K_2 in gerader Linie liegen. Daß in beiden Fällen die Berührungspunkte potenzhaltende Punkte sind, geht daraus hervor, daß sie die Endpunkte nicht parallele Halbmesser sind.

§. 16. Das Berührungsproblem.

Vorbemerkung. Der griechische Mathematiker Apollonius von Pergä, der um 240 v. Chr. in Alexandrien lebte, hatte außer anderen vorzüglichen Schriften, z. B. über die Kegelschnitte, auch ein Werk über die Berührungen von Kreisen geschrieben, welches zwar verloren gegangen, aber durch die von einem andern griechischen Mathematiker dazu gegebenen Erläuterungen seinem Hauptinhalte nach bekannt ist. Da-

her nennt man die Gesammtheit aller Aufgaben, in welchen die Bestimmung eines Kreises durch drei gegebene Stücke, Punkte, Grade oder Kreise, durch die er entweder geht oder die er berührt, verlangt wird, das Problem des Apollonius. Dasselbe umfaßt zehn besondere Fälle, die sich jedoch alle auf den allgemeinsten zurückführen lassen, wo drei Kreise gegeben sind und ein vierter gesucht wird, der sie berührte. Gibt man nämlich einem oder zweien oder allen gegebenen Kreise einen unendlich kleinen oder unendlich großen Radius, so gehen sie bezüglich in Punkte und Grade über. Hiernach können gegeben sein:

1) 3 Kreise,
2) 2 Kreise und ein Punkt,
3) 2 Kreise und eine Grade,
4) 1 Kreis und zwei Punkte,
5) 1 Kreis, ein Punkt und eine Grade,
6) 1 Kreis und zwei Grade,
7) 3 Punkte,
8) 2 Punkte und eine Grade,
9) 1 Punkt und zwei Grade,
10) 3 Grade.

Aufgabe 1. Einen Kreis zu construiren, der 3 gegebene Kreise berührt.

Erste Auflösung. Der gesuchte Kreis kann die gegebenen entweder alle einschließen oder alle ausschließen, oder einen einschließen und zwei ausschließen oder zwei einschließen und einen ausschließen. Jeder der beiden letzten Fälle kann auf dreifache Weise stattfinden. Hiernach ergeben sich acht Auflösungen der Aufgabe, welche paarweise zusammengehören, indem der eine Berührungskreis irgend einen der gegebenen Kreise von außen berührt, wenn der andere ihn von innen berührt. Zwei auf diese Weise zusammengehörige Berührungskreise heißen conjugirte. Wir folgen bei nachstehender Entwicklung Bobillier bei La Frémoire Sammlung pag. 107 ff.

1. Der Kreis abc (Fig. 54.) berühre die drei gegebenen A, B, C von außen, der conjugirte Kreis a'b'c' von innen. Dann ist nach Lehrsatz 5 des §. 12 die Verbindungslinie der Berührungspunkte a und a' ein innerer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise abc und a'b'c; dasselbe gilt von bb' und cc'. Diese 3 Graden müssen sich also in einem Punkte, dem inneren Aehnlichkeitspunkt von abc und a'b'c', schneiden. Nun sind aber nach demselben Lehrsatze die

Berührungspunkte potenzhaltende Punkte, daher hat man nach Lehrsatz 3 des §. 12.

$$pa \cdot pa' = pb \cdot pb' = pc \cdot pc'.$$

Der Punkt p ist also der Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise A, B, C. Die Berührungssehnen aa', bb', cc' gehen daher durch den Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise.

2. Nach Lehrsatz 5 des §. 12 ist sowohl ab als a'b' ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise A und B; ihr Durchschnitt m ist daher der äußere Aehnlichkeitspunkt von A und B. Ebenso treffen sich bc und b'c' im äußeren Aehnlichkeitspunkt m' von B und C und ca und c'a' im äußeren Aehnlichkeitspunkt m'' von C und A. Diese 3 Aehnlichkeitspunkte liegen aber auf einer graden Linie, der äußeren Aehnlichkeitsaxe der Kreise A, B, C. Nun folgt aus der in 1 bewiesenen Gleichung pa . pa' = pb . pb', daß die Punkte a, a' b, b' auf derselben Kreislinie liegen, man hat deshalb auch ma . mb = ma' . mb' d. h. der Punkt m liegt auf der Potenzlinie der Kreise abc und a'b'c'. Ebenso beweist man, daß die Punkte m' und m'' auf der Potenzlinie dieser Kreise liegen müssen. Die äußere Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise ist also die Potenzlinie der gesuchten.

3. Die Tangenten an dem Kreis A in a und a' sind zugleich Tangenten der gesuchten Kreise und müssen sich deshalb auf der Potenzlinie derselben schneiden, ebenso die Tangenten in b, b' und c, c'. Die Berührungssehnen aa', bb', cc' sind nach der Reihe die Polaren dieser Durchschnittspunkte und da nach 2. die Potenzlinie der gesuchten Kreise mit der äußeren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen zusammenfällt, so liegen die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise in Bezug auf dieselben bezüglich auf den Berührungssehnen aa', bb', cc'.

Hieraus ergibt sich folgende Construction:

1) Man construire den Potenzpunkt der gegebenen drei Kreise,
2) die äußere Aehnlichkeitsaxe derselben,
3) die Pole dieser letzteren in Bezug auf jeden der gegebenen Kreise.
4) Man verbinde jeden dieser Pole mit dem Potenzpunkt.

Dadurch erhält man die Berührungspunkte a, b, c für den einen und a', b', c' für den andern Kreis.

Indem man statt der äußeren Aehnlichkeitsaxe je eine der drei inneren nimmt, erhält man die drei übrigen, noch möglichen conjugirten Kreispaare.

Zusatz 1. In Bezug auf die Zahl der Auflösungen ergibt sich aus dieser Construction das nämliche Resultat, was wir oben von einem andern Gesichtspunkte aus gewonnen haben. Diese Zahl beträgt nämlich im Allgemeinen acht, weil die vier Aehnlichkeitsaxen in Bezug auf jeden der gegebenen Kreise vier Pole besitzen, deren Verbindungslinien mit dem Potenzpunkte die Kreise in je zwei Punkten schneiden können. Jedoch kann der Fall

vorkommen, daß eine solche Verbindungslinie den betreffenden Kreis nicht schneidet; für jeden solchen Fall hat man zwei Auflösungen weniger, so daß die Aufgabe entweder acht oder sechs oder vier oder zwei oder gar keine Lösungen zuläßt. Letzteres findet z. B. statt, wenn der zweite Kreis innerhalb des ersten, der dritte innerhalb des zweiten liegt, weil dann die Pole der Aehnlichkeitsaxe, sowohl als der Potenzpunkt außerhalb der Kreise liegen und zwar die ersteren so, daß ihre Verbindungslinien mit dem letzteren wenigstens einen der Kreise nicht treffen.

Zusatz 2. Die vorstehende Auflösung ist ganz allgemein, welche Lage die Kreise und welche Größe ihre Radien haben mögen. Haben z. B. alle drei Kreise gleiche Radien, so ist die äußere Aehnlichkeitsaxe die Linie im Unendlichen und ihre Pole in Bezug auf die 3 Kreise sind deren Mittelpunkte; die inneren Aehnlichkeitsaxen sind die drei Verbindungslinien der Mittelpunkte der Centralen; der Potenzpunkt ist der Durchschnittspunkt der Senkrechten auf die Centralen in deren Mittelpunkten d. h. der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise gebildeten Dreieck umschrieben ist.

Selbst wenn die Radien unendlich klein oder unendlich groß werden, d. h. wenn einer oder mehrere der Kreise in Punkte oder Grade übergehen, bleibt die Auflösung unverändert, wenn man nur den Zusatz 2 zu Lehrsatz 2 des §. 13 und den Zusatz 4 zu Lehrsatz 1 des §. 15 im Auge behält. Wir empfehlen die Ausführung der Constructionen für diese Fälle als eine nützliche Uebung dem Privatfleiße des Lesers.

Nur dann, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise auf einer Graden liegen, wird diese Construction illusorisch, weil dann sowohl der Potenzpunkt, als die Pole der Aehnlichkeitsaxen, die hier alle vier mit der gemeinschaftlichen Centralen zusammenfallen, im Unendlichen liegen. Für diesen Fall muß man die zweite jetzt folgende Auflösungsart anwenden, deren Princip ist, die Aufgabe auf eine Reihe immer einfacherer Aufgaben zurückzuführen.

Zweite Auflösung. Es seien o_1, o_2, o_3 (Fig. 55) die Mittelpunkte und r_1, r_2, r_3 die Halbmesser der gegebenen Kreise, o der Mittelpunkt und r der Halbmesser des gesuchten Kreises. Ist r_3 der kleinste der gegebenen Radien, so beschreibe man um o mit $r + r_3$ als Halbmesser einen Kreis; derselbe geht durch o_3 und berührt zwei Hülfskreise, welche um o_1 und o_2 mit den Halbmessern $r_1 - r_3$ und $r_2 - r_3$ beschrieben sind oder zwei andere Hülfskreise, welche um o_1 und o_2 mit den Halbmessern $r_1 + r_3$ und $r_2 + r_3$ beschrieben sind. Dadurch ist die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt. Da dieselbe für jedes Paar von Hülfskreisen vier Auflösungen hat, so ergeben sich für vorliegende Aufgabe wie früher acht Auflösungen.

Aufgabe 2. Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Berührungspunkte β und γ' (Fig. 56.) des gesuchten Kreises mit den gegebenen sind potenzhaltende Punkte und ihre Verbindungslinie

geht, wenn die Berührung eine gleichartige ist, nach Lehrsatz 5 des §. 15 durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt a der gegebenen Kreise. Man hat daher ac' . ab $=$ $\alpha\gamma'$. $\alpha\beta$, und wenn p der gegebene Punkt ist, auch $\alpha\gamma'$. $\alpha\beta$ $=$ ap . aq, wo q der zweite Schnittpunkt der Linie ap mit dem gesuchten Kreise ist. Daraus folgt ac' . ab $=$ ap . aq, woraus hervorgeht, daß die Punkte b, c', p und q auf einem Kreise liegen. Beschreibt man daher um b, c' und p einen Hülfskreis, so bestimmt derselbe durch seinen Schnittpunkt mit ap den Punkt q und die Aufgabe ist auf die Aufgabe 2 des §. 13 reducirt, einen Kreis zu finden, der durch die 2 Punkte p und q geht und einen gegebenen Kreis o' berührt. Hierdurch erhält man zwei gleichartige Berührungen; nimmt man den inneren Aehnlichkeitspunkt und verfährt gerade so, so erhält man zwei ungleichartige Berührungen, so daß im Ganzen vier Auflösungen herauskommen.

Zusatz. Liegt der Punkt p auf der Centrale der gegebenen Kreise, so kann man durch b, c und p keinen Hülfskreis legen; man hat aber dann ab' . ac $=$ ac' . ab $=$ ap . aq, d. h. die Punkte b', c', p, q und b, c bilden eine Involution auf der Centrale mit dem Mittelpunkt a. Der Punkt q kann also nach Aufgabe 1 des §. 14 bestimmt werden.

Aufgabe 3. Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Kreise und eine gegebene Grade berührt.

Es sei l die gegebene Grade (Fig. 57), o_1, o_2 die Mittelpunkte und r_1, r_2 die Halbmesser der gegebenen Kreise, o der Mittelpunkt und r der Halbmesser des gesuchten Kreises. Ist r_2 der kleinste der gegebenen Radien, so beschreibe man um o mit r $+$ r_2 als Halbmesser einen Kreis; derselbe geht durch o_2 und berührt eine Hülfslinie, welche im Abstande r_2 der gegebenen Graden l parallel ist und einen Hülfskreis, welcher um o_1 mit dem Halbmesser r_1 — r_2 beschrieben ist, oder er berührt eine andere Hülfslinie, welche im Abstande r_2 der gegebenen Graden parallel ist, aber auf der anderen Seite derselben liegt und einen anderen Hülfskreis, welcher um o_1 mit dem Halbmesser r_1 $+$ r_2 beschrieben ist. Dadurch ist die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt. Da dieselbe für jeden Hülfskreis vier Auflösungen hat, so ergeben sich für vorliegende Aufgabe im Allgemeinen acht Auflösungen.

Aufgabe 4. Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Grade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Betrachtet man die gegebene Grade als einen Kreis mit unendlich großem Radius, so kann man gerade so verfahren, wie in Aufgabe 2. Die Berührungspunkte β und γ' (Fig. 58.) des gesuchten Kreises mit dem gegebenen sind alsdann potenzhaltende Punkte und ihre Verbindungslinie geht, wenn die Berührung eine gleichartige ist, durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt a des gegebenen Kreises und der gegebenen Graden; ferner sind c_1 und b äußere

potenzhaltende Punkte. Man hat daher $ac_1 . ab = a\gamma' . a\beta$ und wenn p der gegebene Punkt ist, auch $a\gamma' . a\beta = ap . aq$, wo q der zweite Schnittpunkt der Graden ap mit dem gesuchten Kreis ist. Daraus folgt $ac' . ab = ap . aq$, woraus hervorgeht, daß die Punkte b, c', p und q auf einem Kreis liegen. Beschreibt man daher um b, c' und p einen Hülfskreis, so bestimmt derselbe durch seinen Schnittpunkt mit ap den Punkt q und die Aufgabe ist auf die in der Anmerkung zur Aufgabe 2 des §. 13 behandelte Aufgabe zurückgeführt. Hierdurch erhält man zwei gleichartige Berührungen; nimmt man den inneren Aehnlichkeitspunkt c' und verfährt ebenso, so erhält man zwei ungleichartige Berührungen, so daß im Ganzen vier Auflösungen herauskommen.

Zusatz. Liegt der Punkt p auf der Senkrechten ac'b vom Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf die gegebene Grade, so kann man durch b, c, und p keinen Hülfskreis legen: man hat aber dann $ac' . ab = ap . aq$ d. h. a ist der Mittelpunkt einer Involution, von der das Punktpaar c', b vollständig und vom zweiten Punktpaar der eine Punkt gegeben ist. Man ziehe also durch a und einen beliebigen Punkt des gegebenen Kreises einen Hülfskreis, der durch p geht; derselbe wird ac'b in q schneiden.

Aufgabe 5. Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Grade berührt.

Sind l_1 und l_2 die gegebenen Graden, (Fig. 59.) o_1 der Mittelpunkt und r_1 der Radius des gegebenen Kreises, o der Mittelpunkt und r der Radius des gesuchten Kreises, so beschreibe man um o mit $r + r_1$ als Halbmesser einen Kreis; derselbe geht durch o und berührt zwei Hülfslinien, welche mit l_1 und l_2 im Abstande r_1 parallel sind, oder zwei andere Hülfslinien, welche in demselben Abstande mit ihnen parallel laufen aber auf der anderen Seite derselben liegen. Dadurch ist die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt. Da dieselbe für jedes der vier Hülfslinienpaare, welche durch die Combination der vier Hülfslinien entstehen, zwei Auflösungen gibt, so hat man somit für die vorliegende Aufgabe im Allgemeinen acht Auflösungen, von denen aber vier verschwinden, wenn der Schnittpunkt der gegebenen Graden nicht innerhalb des gegebenen Kreises fällt.

Aufgabe 6. Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Grade berührt.

Sei p der gegebene Punkt (Fig. 60.) und l, l^1 die gegebenen Graden. Man beschreibe von einem beliebigen Punkte o' der Winkelhalbirenden der letzteren einen Hülfskreis, der sie berührt, dann ist ihr Schnittpunkt m der äußere Aehnlichkeitspunkt dieses Kreises und der gegebenen. Verbindet man denselben mit p, so muß o'p' parallel sein mit op, wo o der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, und außerdem noch o'q' parallel mit oq. Da nun o'p' und o'q' bekannt sind, so erhält man durch von p aus mit diesen bei-

den Linien gezogene Parallelen auf der Winkelhalbirenden zwei Punkte, von denen jeder der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die gegebenen Bedingungen erfüllt.

Zusatz. Liegt der Punkt p auf der Winkelhalbirenden, dann gehören wieder die Punkte q', p und p', q als potenzhaltende Punkte einer Involution mit dem Mittelpunkte m an und der fehlende Punkt q kann wie im Zusatz zur Aufgabe 4 gefunden werden.

§. 17 Die Projectivität der Punktreihen und Strahlenbüschel.

Erklärung 1. Wenn auf einer Graden vier Punkte a, b, c, d, d. h. eine Punktreihe von vier Punkten, gegeben sind, so nennt man das Verhältniß des Verhältnisses der Theile ac, cb der Strecke ab zu dem Verhältniß der Theile ad, db der nämlichen Strecke d. h.

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}$$

im Doppelschnittsverhältniß oder kurzweg Doppelverhältniß der vier Punkte. (Chasles benennt dasselbe mit dem unpassenden Namen anharmonisches Verhältniß) und bezeichnet es mit dem Symbol abcd. Da man sowohl ab, ac, ad, bc, bd, cd als auch die ihnen gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Strecken ba, ca, da, cb, db, dc als getheilte Strecken und jeden der beiden jedesmal noch übrigen Punkte als ersten Theilpunkt ansehen kann, so ergeben sich für vier Punkte einer Graden 24 mögliche Doppelverhältnisse, die jedoch in einer gewissen Beziehung zu einander stehen. Ein Doppelverhältniß ist nach der Regel der Zeichen positiv, wenn die Theilpunkte beide innerhalb oder beide außerhalb der getheilten Strecke liegen, negativ, wenn der eine innerhalb, der andere außerhalb liegt.

Anmerkung. Die harmonische Theilung ist nur ein specieller Fall der Theilung nach dem Doppelschnittsverhältniß, indem hier letzteres gleich — 1 ist.

Lehrsatz 1. Die 24 Doppelverhältnisse, welche für 4 Punkte a, b, c, d einer Graden möglich sind, zerfallen in sechs

Gruppen von je vier gleichen Doppelverhältnissen, welche, wenn man den Werth des Doppelverhältnisses (abcd) durch λ bezeichnet, die in folgender Tabelle gegebenen Werthe besitzen:

λ	$\frac{1}{\lambda}$	$1 - \lambda$	$\frac{\lambda - 1}{\lambda}$	$\frac{1}{1 - \lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda - 1}$
(abcd)	(abdc)	(acbd)	(adbc)	(acdb)	(adcb)
(badc)	(bacd)	(bdac)	(bcad)	(bdca)	(bcda)
(cdab)	(cdba)	(cadb)	(cbda)	(cabd)	(cbad)
(dcba)	(dcab)	(dbca)	(dacb)	(dbac)	(dabc)

Daß die vier Doppelverhältnisse einer jeden Columne z. B. der ersten unter sich gleich sind, ergibt sich aus der Erklärung derselben, indem

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{bd}{da} : \frac{bc}{ca} = \frac{ca}{ad} : \frac{cb}{bd} = \frac{da}{ac} : \frac{db}{bc} = \frac{ac\,.\,db}{cb\,.\,ad}$$

Die Symbole gleicher Doppelverhältnisse leitet man auseinander her, indem man sie einerseits umgekehrt liest und andererseits in dem gegebenen Symbol sowohl wie in dem umgekehrten die zwei letzten Buchstaben vor die zwei ersten setzt.

Da $(abcd) = \frac{ca}{cb} : \frac{ad}{db}$

und $(abcd) = \frac{ad}{db} : \frac{ac}{cb}$

so ergibt sich durch Multiplication, daß $(abdc) = \frac{1}{\lambda}$ d. h. daß ein Doppelverhältniß der 2ten Columne gleich dem reciproken Werthe eines der ersten ist. Solche Doppelverhältnisse heißen reciproke und ihre Symbole gehen auseinander durch Vertauschung der 2 letzten Buchstaben hervor.

Da $ab + bc = ac$

und $ab = ab + bd$,

so folgt durch Multiplication dieser beiden Gleichungen:

$ab\,.\,ad + bc\,.\,ad = ac\,.\,ab + ac\,.\,bd$ oder

$ab\,(ad - ac) = ac\,.\,bd - bc\,.\,ad$ oder

$ab\,.\,cd = ac\,.\,bd - bc\,.\,ad$

Dividirt man diese Gleichung durch $bc\,.\,ad$, so folgt daraus

$$\frac{ab\,.\,cd}{bc\,.\,ad} = \frac{ac\,.\,bd}{bc\,.\,ad} - 1 \text{ oder}$$

$$-(acbd) = (abcd) - 1 \text{ d. h.}$$

$$(acbd) = 1 - \lambda$$

Ein Doppelverhältniß der 3ten Columne ergänzt also eines der ersten zu 1. Solche Doppelverhältnisse heißen complementäre und ihre Symbole ergeben sich auseinander, indem man die mittleren Buchstaben vertauscht.

Bildet man von einem Doppelverhältniß der 2ten Columne das complementäre, so erhält man ein Doppelverhältniß der 4ten Columne mit dem Werthe $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$; das reciproke Doppelverhältniß eines Doppelverhältnisses der 3ten Columne ist ein Doppelverhältniß der 5ten Columne mit dem Werthe $\frac{1}{1 - \lambda}$ und von diesem wieder das complimentäre ein Doppelverhältniß der 6ten Columne.

Lehrsatz 2. Wenn der Werth eines Doppelverhältnisses von 4 Punkten und drei dieser Punkte gegeben sind, so ist dadurch der 4te unzweideutig bestimmt.

Denn ist $\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \lambda$ und sind die Punkte a, b, c bekannt, so hat man

$$\frac{ad}{db} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ac}{cb},$$

so daß die rechte Seite der Gleichung bekannt ist. Setzt man nun bd = x, so ist, weil ad = ab + bd und db = — bd:

$$\frac{ab + x}{- x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ac}{cb},$$

was eine Gleichung des ersten Grades ist, die für x nur einen Werth ergibt.

Erklärung 2. Wenn 4 durch einen Punkt gehende Grade α, β, γ, δ, d. h. ein Strahlenbüschel von 4 Strahlen gegeben sind, so nennt man das Verhältniß des Verhältnisses der von einem Punkte des Strahles γ auf die beiden Strahlen α und β gefällten Perpendikel zu dem Verhältniß der von einem Punkte des Strahles δ auf die nämlichen Strahlen gefällten Perpendikel oder, was das nämliche ist, das Verhältniß des Verhältnisses der Sinus der zwischen dem Strahl γ und den Strahlen α und β liegenden Winkel zu dem Verhältniß der Sinus der zwischen dem Strahl δ und den nämlichen Strahlen liegenden Winkel d. h.

$$\frac{\sin \gamma\alpha}{\sin \gamma\beta} : \frac{\sin \delta\alpha}{\sin \delta\beta}$$

ein Doppelschnittsverhältniß oder kurzweg Doppelverhältniß der 4 Strahlen und bezeichnet es mit dem Symbol $(\alpha\beta\gamma\delta)$, oder wenn a, b, c, d die Schnittpunkte desselben mit einer Transversalen und o den Durchschnittspunkt (Scheitel) der 4 Graden bedeuten, mit dem Symbol o (abcd). In ähn-

licher Weise, wie bei den Doppelverhältnissen von Punkten ergeben sich für 4 Strahlen 24 mögliche Doppelverhältnisse, welche durch die nämlichen Relationen miteinander verbunden sind. Ein solches Doppelverhältniß ist positiv, wenn die Theilstrahlen beide innerhalb oder beide außerhalb des getheilten Winkels liegen, negativ, wenn der eine innerhalb, der andere außerhalb liegt.

Anmerkung. Ein harmonisches Strahlenbüschel hat, wie aus dem folgenden Lehrsatze verglichen mit der Erklärung des §. 6 hervorgehen wird, das Doppelverhältniß — 1, so daß für 4 harmonische Strahlen die Relation gilt

$$\frac{\sin \gamma\alpha}{\sin \gamma\beta} = - \frac{\sin \delta\alpha}{\sin \delta\beta}$$

Dieser Relation kann man unter anderen eine merkwürdige Form geben. Nennt man nämlich den Strahl, welcher den Winkel zwischen α und β halbirt, o, so geht obige Gleichung über in

$$\frac{\sin (\gamma o + o\alpha)}{\sin (\gamma o + o\beta)} = - \frac{\sin (\delta o + o\alpha)}{\sin (\delta o + o\beta)}$$

wobei $o\alpha = - o\beta$ ist. Nach bekannten goniometrischen Formeln erhält man aus der letzten Gleichung

$$\frac{\sin \gamma o \,.\, \cos o\alpha + \cos \gamma o \sin o\alpha}{\sin \gamma o \,.\, \cos o\beta + \cos \gamma o \sin o\beta} = - \frac{\sin \delta o \cos o\alpha + \cos \delta o \sin o\alpha}{\sin \delta o \cos o\beta + \cos \delta o \,.\, \sin o\beta}$$

und wenn man Zähler und Nenner links mit $\cos o\alpha \,.\, \cos \gamma o$, rechts durch $\cos o\alpha \,.\, \cos \delta o$ dividirt.

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma o + \operatorname{tg} o\alpha}{\operatorname{tg} \gamma o - \operatorname{tg} o\alpha} = - \frac{\operatorname{tg} \delta o + \operatorname{tg} o\alpha}{\operatorname{tg} \delta o - \operatorname{tg} o\alpha}$$

Durch Entwicklung erhält man:

$$\operatorname{tg}^2 o\alpha = \operatorname{tg} \gamma o \,.\, \operatorname{tg} \delta o = \operatorname{tg} o\gamma \,.\, \operatorname{tg} o\delta.$$

Lehrsatz 3. Das Doppelverhältniß eines Strahlenbüschels ist gleich dem Doppelverhältniß der Punktreihe, in welcher es von einer Transversale geschnitten wird.

Die Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Fig. 61) werden von der Transversale in den Punkten a, b, c, d geschnitten, dann ist

$$\frac{\triangle\, oac}{\triangle\, ocb} = \frac{ac}{cb} = \frac{oa \,.\, oc \,.\, \sin \alpha\gamma}{oc \,.\, ob \,.\, \sin \gamma\beta}$$

$$\frac{\triangle\, oad}{\triangle\, odb} = \frac{ad}{db} = \frac{oa \,.\, od \,.\, \sin \alpha\delta}{od \,.\, ob \,.\, \sin \delta\beta}$$

Durch Division erhält man

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \gamma\beta} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \delta\beta}$$

Lehrsatz 4. Wenn der Werth eines Doppelverhältnisses von 4 Strahlen und drei dieser Strahlen gegeben sind, so ist dadurch der vierte unzweideutig bestimmt.

Denn sind das Doppelverhältniß λ und die Strahlen α, β, γ bekannt, so schneide man das Strahlenbüschel durch eine Grade, welche die 3 bekannten Strahlen beziehungsweise in den Punkten a, b, c trifft; der Schnittpunkt mit dem unbekannten Strahl δ sei d. Dann ist auch (abcd) $= \lambda$ und deßhalb d nach Lehrsatz 2 vollständig bestimmt, folglich auch der zugeordnete Strahl δ.

Lehrsatz 5. Das Doppelverhältniß der 4 Punkte, in welchen ein Strahlenbüschel von einer Transversalen geschnitten wird, ist gleich dem Doppelverhältniß der 4 Punkte, in welchen es von einer zweiten Transversale geschnitten wird.

Denn nach Lehrsatz 3 ist (Fig. 62)

$$o\,(abcd) = (abcd) \text{ und}$$
$$o\,(a'b'c'd') = (a'b'c'd')$$

und da die linken Seiten dieser Gleichungen gleich sind, so sind es auch die rechten, d. h. es ist

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

Zusatz. Dieser Satz giebt ein Mittel an die Hand, jedes Doppelverhältniß in ein einfaches zu verwandeln. Ist nämlich das Doppelverhältniß der vier Punkte a, b, c, d (Fig. 62) gegeben, nämlich

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} = \lambda,$$

so ziehe man von irgend einem Punkte o aus Strahlen nach diesen Punkten und lege durch irgend einen derselben z. B. durch c eine Parallele mit einem dieser Strahlen z. B. mit oa. Ist dann b' der Schnittpunkt dieser Parallele mit ob und d' der mit od, so ist $\frac{d'b'}{cb'} = \lambda$. Denn bezeichnet man den Schnittpunkt mit oa, der im Unendlichen liegt, durch a', so hat man

$$\frac{a'c}{cb'} : \frac{a'd'}{d'b'} = \lambda \text{ oder } \frac{a'c}{a'd'} \cdot \frac{d'b'}{cb'} = \lambda$$

Nun ist aber $\frac{a'c}{a'd'} = \frac{a'd' + d'c}{a'd'} = 1 + \frac{d'c}{a'd'}$ und weil a'd' unendlich groß ist, so reducirt sich der Werth von $\frac{a'c}{a'd'}$ auf 1 und man hat daher auch

$$\frac{d'b'}{cb'} = \lambda.$$

Lehrsatz 6. Das Doppelverhältniß der 4 Strahlen, welche von einem Punkte nach den 4 Punkten einer Punktreihe

gehen, ist gleich dem Doppelverhältniß der 4 Strahlen, welche von einem zweiten Punkte nach denselben Punkten gehen.

Denn es ist nach Lehrsatz 3. (Fig. 64.)

(abcd) = o (abcd) und

(abcd) = o' (abcd)

Daher auch o (abcd) = o' (abcd)

Erklärung 3. Punktreihen von vier Punkten, welche dasselbe Doppelverhältniß haben, heißen projectivisch und die Punkte, welche in ihren Symbolen dieselbe Stellung einnehmen, entsprechende. Haben projectivische Punktreihen eine solche Lage, daß ihre entsprechenden Punkte auf 4 Graden liegen, die durch einen Punkt gehen, wie dies in Lehrsatz 5 vorausgesetzt ist, so nennt man sie perspectivisch.

Lehrsatz 7. Legt man zwei projectivische Punktreihen von je vier Punkten so, daß zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, so sind sie perspectivisch.

Verbindet man (Fig. 65) b mit b' und c mit c' durch Grade, die sich in dem Punkte o schneiden und zieht von o Strahlen nach a und d, so treffe der letztere Strahl den Träger der Punktreihe a'b'c'd' in δ'; man hat dann nach Lehrsatz 5

$$(a'b'c'\delta') = (abcd)$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$(a'b'c'd') = (abcd)$$

Daher auch $(a'b'c'\delta') = (a'b'c'd')$, was nach Lehrsatz 2 nur sein kann, wenn $\delta' = d'$.

Erklärung 4. Strahlenbüschel von vier Strahlen, welche dasselbe Doppelverhältniß haben, heißen projectivisch und die Strahlen, welche in ihren Symbolen dieselbe Stellung einnehmen, entsprechende. Haben projectivische Strahlenbüschel eine solche Lage, daß ihre entsprechenden Strahlen sich in 4 Punkten schneiden, die auf einer graden Linie liegen, wie dies in Lehrsatz 6 vorausgesetzt ist, so nennt man sie perspectivisch.

Lehrsatz 8. Legt man zwei projectivische Strahlenbüschel so, daß zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, so sind sie perspectivisch.

Vorausgesetzt die Strahlen α und α' (Fig. 66) fielen zusammen, die Strahlen β, β' und γ, γ' schnitten sich bezüglich in den Punkten b und c

und die durch diese Punkte gelegte Grade treffe das zusammenfallende Strahlenpaar α, α' in a, die Strahlen δ in d und δ' in d', so hätte man, wenn man von o' aus einen Strahl nach d zieht, nach Lehrsatz 3:

$$o\,(abcd) = o'\,(abcd)$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$o\,(abcd) = o'\,(abcd')$$

Daher auch o' (abcd) = o' (abcd'), was nach Lehrsatz 4 nur geschehen kann, wenn d = d'.

Erklärung 5. Eine unbegrenzte Anzahl von Punkten auf einer Graden wollen wir eine Punktreihe im allgemeinen Sinne nennen und eine unbegrenzte Anzahl von Graden, die durch einen Punkt gehen, ein Strahlenbüschel im allgemeinen Sinne. Entspricht jeder Punkt einer Punktreihe einem Punkte einer andern Punktreihe so, daß das Doppelverhältniß von 4 beliebigen Punkten der einen Punktreihe gleich dem Doppelverhältniß der entsprechenden 4 Punkte der andern ist, so nennt man beide Punktreihen projectivisch oder collinear.

Entspricht jeder Strahl eines Strahlenbüschels einem Strahl eines andern Strahlenbüschels dergestalt, daß das Doppelverhältniß von 4 beliebigen Strahlenbüscheln gleich dem Doppelverhältniß der entsprechenden vier Strahlen des andern ist, so nennt man beide Strahlenbüschel projectivisch oder collinear.

Lehrsatz 9. Legt man 2 projectivische Punktreihen im allgemeinen Sinne so, daß 2 entsprechende Punkte zusammenfallen, so schneiden sich die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte in einem Punkte. Projectivische Punktreihen, die eine solche Lage haben, nennt man perspectivisch.

Vorausgesetzt die Punkte a und a' fielen zusammen, so werden die Verbindungslinien von b und b', c und c', d und d' sich in einem Punkte schneiden nach Lehrsatz 7, ebenso aber auch die Verbindungslinien von c und c', d und d', e und e' und so fort und zwar werden alle diese Schnittpunkte in einen zusammenfallen, weil ein Punkt schon durch den Schnitt zweier Graden bestimmt ist.

Lehrsatz 10. Legt man zwei projectivische Strahlenbüschel im allgemeinen Sinne so, daß 2 entsprechende Strahlen zusammenfallen, so liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechen-

der Strahlen in einer Graden. Projectivische Strahlenbüschel, die eine solche Lage haben, nennt man perspectivisch.

Wird ähnlich wie der vorige Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 11. Wenn eine Punktreihe a, b, c, d ꝛc. vollständig und von einer andern mit ihr projectivischen drei Punkte a′, b′, c′ gegeben sind, so ist damit der einem beliebigen Punkte d der ersten entsprechende Punkt d′ der zweiten unzweideutig bestimmt.

Denn man hat $(abcd) = (a'b'c'd')$ vergl. Lehrsatz 2.

Lehrsatz 12. Wenn 2 Punktreihen in einer solchen Abhängigkeit von einander sind, daß einem Punkte der einen Reihe immer ein aber auch nur ein Punkt der anderen Reihe entspricht, so sind die Reihen projectivisch.

Denn greift man 4 entsprechende Punkte aus beiden Reihen heraus und nennt die Entfernung des zweiten, dritten und vierten Punktes vom ersten in beiden Reihen bezüglich x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, so ist das Doppelverhältniß der 4 Punkte einer Reihe dargestellt durch die Ausdrücke

$$\frac{x_2}{x_2 - x} : \frac{x_3}{x_3 - x} \text{ und } \frac{y_2}{y_2 - x} : \frac{y_3}{y_3 - x}$$

Nun kann aber die in dem Lehrsatze verlangte Abhängigkeit der beiden Punktreihen nur durch eine Gleichung des ersten Grades von folgender Form ausgedrückt sein

$$xy + ax + by = o$$

aus welcher man für jeden Werth von x aus einen bestimmten Werth von y erhält und umgekehrt; ein constantes Glied kann diese Gleichung nicht enthalten, weil x Null werden muß, wenn y Null wird und umgekehrt. Aus dieser Gleichung erhält man

$$x = -\frac{by}{a + y}$$

Daher ist

$$\frac{x_2}{x_2 - x} = -\frac{by_2}{a + y_2} : \left[-\frac{by_2}{a + y_2} + \frac{by}{a + y}\right]$$

$$= -\frac{y_2 (a + y)}{a (y - y_2)} = \frac{y_2 (a + y)}{a (y_2 - y)}$$

Ebenso ist

$$\frac{x_3}{x_3 - x} = \frac{y_3 (a + y)}{a (y_3 - y)}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{x_2}{x_2 - x} : \frac{x_3}{x_3 - x} = \frac{y_2}{y_2 - y} : \frac{y_3}{y_3 - y}$$

womit der Lehrsatz bewiesen ist.

Lehrsatz 13. Wenn ein Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ꝛc. und einem andern mit ihm projectivischen drei Strahlen α', β', γ' gegeben sind, so ist damit der einem beliebigen Strahl δ des ersten entsprechende Strahl δ des zweiten unzweideutig bestimmt.

Denn man hat $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ vergl. Lehrsatz 4.

Lehrsatz 14. Wenn zwei Strahlenbüschel in einer solchen Abhängigkeit von einander stehen, daß einem Strahle des einen Büschels immer ein aber auch nur ein Strahl des andern Büschels entspricht, so sind die Büschel projectivisch.

Dann schneidet man jedes Büschel durch eine Transversale, so entspricht jedem Schnittpunkt der einen Transversale mit einem Strahl des ersten Büschels der Schnittpunkt der zweiten Transversale mit dem entsprechenden Strahl des zweiten Büschels und die auf beiden Transversalen entstehenden Punktreihen stehen in der im Lehrsatz 12 ausgesprochenen Abhängigkeit, sind also projectivisch; folglich sind nach Lehrsatz 3 auch die beiden Strahlenbüschel projectivisch.

Aufgabe 1. Wenn eine Punktreihe a, b, c, d ꝛc. vollständig und von einer zweiten die Punkte a′, b′, c′, gegeben sind, zu jedem Punkte der ersten den entsprechenden Punkt der zweiten zu finden.

Auflösung. Man nehme auf der Verbindungslinie von a und a′ (Fig. 67) zwei beliebige Punkte o und o′ an, verbinde o mit b und c und o′ mit b′ und c′; die Schnittpunkte von ob und o′b′ und von oc und o′c′ nämlich β und γ liegen dann auf einer Graden, welche durch die Verbindungslinie von o und o′ in α und durch die Verbindungslinie von o und d in δ geschnitten wird.

Die Verbindungslinie von o′ mit δ schneidet dann die Träger von a′, b′, c′ in dem Punkte d′, welcher der entsprechende zu d ist.

Denn es ist (abcd) $=$ o (abcd) $=$ o $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und
(a′b′c′d′) $=$ o (a′b′c′d′) $=$ o $(\alpha\beta\gamma\delta)$
also auch (abcd) $=$ (a′b′c′d′)

Anmerkung 1. Am einfachsten gestaltet sich die Auflösung, wenn man die Punkte o und o′ bezüglich mit a und a′ zusammen fallen läßt.

Anmerkung 2. In dem Punkte, wo sich die Träger der beiden Punktreihen schneiden, fallen zwei nicht entsprechende Punkte e′ und f zusammen, deren entsprechende in der Figur construirt sind.

Aufgabe 2. Wenn ein Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ꝛc. vollständig und von einem zweiten die drei Strahlen α', β', γ'

gegeben sind, zu jedem Strahle des ersten den entsprechenden Strahl des zweiten zu finden.

Auflösung. Man lege durch den Durchschnittspunkt a der Strahlen α und α' zwei beliebige Grade ω und ω'; β und γ werden dann von ω in b und c, β' und γ' von ω' in b' und c' geschnitten. Die Graden bb' und cc' werden sich in einem Punkte M schneiden, dessen Verbindungslinie mit dem Schnittpunkte d von δ mit ω die Grade ω' in einem Punkte d' treffen wird, welcher mit B' der dem δ entsprechenden Strahl δ' liefert.

Denn es ist $(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd) = M\,(abcd)$ und

$(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = (a'b'c'd') = M\,(a'b'c'd')$

und da $M\,(abcd) = M\,(a'b'c'd')$, so ist auch $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha'\beta'\gamma'\delta')$

Anmerkung 1. Am einfachsten gestaltet sich die Auflösung, wenn man die Graden ω und ω' bezüglich mit α und α' zusammenfallen läßt.

Anmerkung 2. In der Verbindungslinie der Scheitel der Strahlenbüschel fallen zwei nicht entsprechende Strahlen zusammen, deren entsprechende in der Figur construirt sind.

Lehrsatz und Erklärung 15. In jeder von 2 projectivischen Punktreihen gibt es einen Punkt, welcher dem unendlich entfernten der anderen entspricht. Diese Punkte heißen Gegenpunkte.

Denn bringt man die beiden projectivischen Punktreihen in perspectivische Lage (Fig. 69) und verbindet alle entsprechende Punkte durch Grade, so schneiden sich diese nach Lehrsatz 9 in einem Punkte. Legt man durch diesen Parallelen mit den beiden Punktreihen, so schneidet jede derselben die eine in ihrem unendlichentfernten Punkte, die andere in seinem Gegenpunkte.

Zusatz 1. Liegt der Punkt, in welchem sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden, im Unendlichen, so liegen alle Paare entsprechender Punkte auf Parallelen und die Gegenpunkte beide im Unendlichen. Die Punktreihen sind dann ähnlich und zwei Strecken, welche zwischen drei beliebigen Punkten der einen Punktreihe liegen, proportional den Strecken, welche zwischen den entsprechenden Punkten der anderen liegen.

Zusatz 2. Nennt man die Gegenpunkte der Punktreihen r und q' und ihre unendlich entfernten Punkte ∞ und ∞', so ist

$$(abr\infty) = (a'b'\infty'q')$$

d. h. $\frac{ar}{rb} : \frac{a\infty}{\infty b} = \frac{a'\infty'}{\infty'b'} : \frac{aq'}{q'b'}$

oder weil $\frac{a\infty}{\infty b} = \frac{a'\infty'}{\infty'b'} = -1$ ist

$$\frac{ar}{br} = 1 : \frac{a'q'}{b'q'}$$

oder $ar \,.\, a'q' = br \,.\, b'q' = \pm p^2$

woraus hervorgeht, daß das Produkt der Entfernungen je zweier

entsprechender Punkte von den Gegenpunkten ihrer Punktreihen constant ist. Dieses constante Produkt, welches positiv oder negativ sein kann, heißt Potenz der projectivischen Beziehung. Nähert sich a dem Gegenpunkte r, so entfernt sich sein entsprechender Punkt a' von q' und fällt ins Unendliche, wenn a mit r zusammenfällt. Geht dann a in derselben Richtung über r hinaus, so kommt a' aus dem Unendlichen her näher an q' herangerückt und fällt mit ihm zusammen, wenn a das Unendendliche erreicht hat. Liegen beide Punktreihen zusammen auf einer Graden und ist die Potenz positiv, so liegt a' in derselben Richtung von q' aus, wie a von r. Wenn also a aus dem Unendlichen her sich dem r nähert, so kommt ihn a' von q' aus entgegen und fällt in's Unendliche, wenn a den Gegenpunkt r erreicht hat; geht dann a in derselben Richtung über r hinaus, so kommt ihm wieder a' aus dem Unendlichen entgegen und fällt mit p' zusammen, wenn a das Unendliche erreicht hat. Man nennt daher solche Punktreihen ungleichlaufende. Ist dagegen die Potenz der projectivischen Beziehung negativ, so liegt a' in der entgegengesetzten Richtung von q' aus, wie a von r. Wenn also a von dem Unendlichen her sich dem r nähert, so geht ihm a' von q' aus in derselben Richtung voran und fällt ins Unendliche, wenn a den Gegenpunkt r erreicht hat; geht dann a in derselben Richtung über r hinaus, so folgt ihm a' aus dem Unendlichen her nach und fällt mit q' zusammen, wenn a das Unendliche erreicht hat. Man nennt daher solche Punktreihen gleichlaufende. In beiden Fällen kann es vorkommen, daß ein Punkt der einen Reihe mit einem Punkte der andern Reihe zusammenfällt. Solche Punkte der Grade, in denen dies geschieht, heißen Doppelpunkte.

Lehrsatz und Erklärung 16. In jedem von 2 projectivischen Strahlenbüschel gibt es ein Paar senkrecht aufeinanderstehender Strahlen, deren entsprechende im 2ten Büschel auch senkrecht auf einander stehen. Man nennt diese Graden die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel.

Denn bringt man die beiden projectivischen Strahlenbüschel in perspectivische Lage (Fig. 70), so schneiden sich alle entsprechende Strahlen nach Lehrsatz 10 in einer Graden. Beschreibt man nun durch die Scheitel einen Kreis, dessen Mittelpunkt in dieser Graden liegt, so schneidet er dieselbe in 2 Punkten, deren Verbindungslinien bezüglich mit dem einen und dem anderen Scheitel rechte Winkel bilden, deren Schenkel sich entsprechen.

Zusatz 1. Liegt die Grade, auf welcher die Schnittpunkte sich entsprechender Strahlen liegen, im Unendlichen, so ist immer ein Strahl seinem entsprechenden parallel und jedem rechten Winkel des einen Büschels entspricht ein rechter Winkel des anderen. Die Büschel sind dann gleich und ähnlich.

Zusatz 2. Nennt man die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel s, t und s', t' und legt in dem einen Strahlenbüschel auf s, in dem andern auf t' eine Senkrechte, so werden beide Senkrechten in Punktreihen geschnitten, die unter einander projectivisch sind und zwar entspricht dem Schnittpunkt von s mit der Senkrechten der unendlich entfernte Punkte der andern Punktreihe und dem Schnittpunkt von t' mit der zugehörigen Senkrechten der unendlich entfernte Punkt der ersten Punktreihe; diese Schnittpunkte sind also die Gegenpunkte der Punktreihen und von ihnen gilt, was im Zusatz 2 des vorigen Lehrsatzes über ihre Entfernungen von entsprechenden Punkten bewiesen wurde. Da aber zu entsprechenden Punkten entsprechende Strahlen gehören, so ergibt sich daraus folgende Regel: Wenn ein Strahl α sich dem Schenkel s nähert, so entfernt sich sein entsprechender Strahl von t' und fällt mit s' zusammen, sobald α den Schenkel s erreicht hat. Geht dann α in derselben Richtung wie vorher über s hinaus, so nähert sich die rückwärtige Verlängerung des entsprechenden Strahls von der Verlängerung von s' aus dem Schenkel t' und fällt mit ihm zusammen, wenn α den Schenkel t erreicht hat.

Dasselbe Resultat läßt sich noch präciser durch folgende Betrachtung erreichen. Es ist

$$(\alpha\beta st) = \alpha'\beta's't') \text{ d. h.}$$

$$\frac{\sin(\alpha s)}{\sin(s\beta)} : \frac{\sin(\alpha t)}{\sin(t\beta)} = \frac{\sin(\alpha' s')}{\sin(s'\beta')} : \frac{\sin(\alpha' t')}{\sin(t'\beta')}$$

und da $\sin(\alpha t) = \cos(s\alpha)$ $\quad \sin(t\beta) = \cos(\beta s)$

$\sin(\alpha' t') = \cos(s'\alpha')$ $\quad \sin(t'\beta') = \cos(\beta' s')$

so hat man

$$\frac{tg(\alpha s)}{tg(s\beta)} = \frac{tg(t'\beta')}{tg(\alpha' t')}$$

oder $tg(\alpha s) \,.\, tg(\alpha' t') = tg(\beta s) \,,\, tg(\beta' t') = \pm p^2$

d. h. **das Produkt der Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen mit den nicht entsprechenden Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschließen, ist für alle Paare constant.** Daselbe heißt, wie bei den projectivischen Punktreihen, die **Potenz der projectivischen Beziehung.** Nimmt man statt der Schenkel s und t' die ebenfalls nicht entsprechenden s' und t, so erhält man

$$tg(\alpha s') \,,\, tg(\alpha' t) = tg(\beta s') \,.\, tg(\beta' t)$$

und da $tg(\alpha s) \,.\, tg(\alpha' t') = \cot g(\alpha s') \,.\, \cot g(\alpha' t')$ so ist jetzt die Potenz der reciproke Werth der vorigen. Man sieht also, daß wenn die Potenz gegeben ist, man auch noch wissen muß, auf welche nicht entsprechende Winkel sie sich bezieht. Uebrigens erkennt man leicht, daß, wenn die eine Potenz > 1, die andere < 1 sein muß.

Liegen beide Strahlenbüschel so, daß ihre Scheitel zusammenfallen und ist die Potenz positiv, so liegt α' in derselben Drehungsrichtung von t' aus, wie α von s. Wenn also α von s' aus sich gegen s zu dreht, so kommt ihm von s aus entgegen und fällt mit s' zusammen, wenn α den Schenkel s

erreicht hat. Geht dann α in derselben Richtung über s hinaus, so kommt ihm die rückwärtige Verlängerung von α' von der andern Seite her wieder entgegen und fällt mit t' zusammen, wenn α den Schenkel t erreicht hat und mit t, wenn α den Schenkel t' erreicht hat. Man nennt daher solche Strahlenbüschel ungleichlaufende. Ist dagegen die Potenz der projectivischen Beziehungen negativ, so liegt α' in der entgegengesetzten Richtung von t' aus, wie α von s. Wenn also α von s' aus sich gegen s zu dreht, so geht ihm α' von s aus in derselben Drehungsrichtung voran und fällt auf s' resp dessen Verlängerung, wenn α den Schenkel s erreicht hat. Geht dann α in derselben Richtung über s hinaus, so folgt ihm α' von s' her und fällt mit t' resp. dessen Verlängerung zusammen, wenn α den Schenkel t resp. dessen Verlängerung erreicht hat. Man nennt daher solche Punktreihen gleichlaufende. In beiden Fällen kann es vorkommen, daß ein Strahl des einen Büschels mit einem Strahl des andern Büschels zusammenfällt. Solche Strahlen des Büschels, in denen dies geschieht, heißen Doppelstrahlen.

Lehrsatz 17. Ungleichlaufende Punktreihen haben immer zwei Doppelpunkte, gleichlaufende nur dann, wenn die Potenz $p < \frac{1}{2}\,rq'$; ist $p = \frac{1}{2}\,rq'$, so haben sie nur einen, ist es $> \frac{1}{2}\,rq'$, gar keinen Doppelpunkt.

Aus dem letzten Abschnitt des Zusatzes 2 zu Lehrsatz 13 ergibt sich für ungleichlaufende Punktreihen sofort, daß bei der Bewegung eines Punktes der einen Reihe auf dem gemeinschaftlichen Träger ihm der entsprechende Punkt zweimal, einmal rechts von q' und einmal links von r begegnet, vorausgesetzt, daß q' rechts von r liegt. Man hat also zwei Doppelpunkte außerhalb der Strecke rq'. Sind dagegen die Punktreihen ungleichlaufend, so kann der Punkt seinen entsprechenden nur innerhalb der Strecke rq' einholen oder von ihm eingeholt werden; wenn es also Doppelpunkte gibt, so liegen sie innerhalb dieser Strecke.

In der That, ist m ein Doppelpunkt, so hat man die Relation

$$mr \,.\, mq' = \pm\, p^2$$

und wenn man den Mittelpunkt der Strecke rq' mit o bezeichnet

$$(mo + or)\,(mo + oq') = \pm\, p^2$$

oder weil $oq' = -\, or$ ist

$$mo^2 - or^2 = \pm\, p^2$$

woraus

$$mo^2 = or^2 \pm p^2$$

Doppelpunkte sind also immer vorhanden, sobald die rechte Seite der obigen Gleichung positiv ist. Dies ist immer der Fall, wenn das obere Zeichen gilt d. h. die Potenz positiv ist oder die Punktreihen ungleichlaufend sind; es findet aber auch bei gleichlaufenden Punktreihen statt, sobald $p <$ or. In diesen beiden Fällen gibt es zwei Doppelpunkte, welche in gleichen Entfernungen rechts und links von o liegen. Sind die Punktreihen gleich-

laufend und zugleich $p = or$, so fallen die zwei Doppelpunkte in einen zusammen und zwar im Punkte o; ist aber $p > or$, so gibt es keine Doppelpunkte mehr.

Zusatz. Aus der Relation $mo^2 = or^2 + p^2$, welche für ungleichlaufende Punktreihen gilt, ergibt sich folgende Construction der Doppelpunkte, wenn r, q' und p gegeben sind. Man errichte (Fig. 71) auf rq' in r eine Senkrechte von der Länge p und beschreibe von o aus einen Kreis, der durch den freien Endpunkt dieser Senkrechten geht; die zwei Punkte, in welchen derselbe den Träger der Punktreihe schneidet, sind die Doppelpunkte. Sind aber die Punktreihen gleichlaufend, also $mo^2 = or^2 - p^2$, so beschreibe man über rq' als Durchmesser einen Kreis und in einer Entfernung $= p$ zu rq' eine Parallele; von den 2 Schnittpunkten derselben mit dem Kreis fälle man auf rq' Senkrechten, die Fußpunkte derselben sind die gesuchten Doppelpunkte. Diese Constructionen zeigen, wie wir von einem andern Standpunkte aus schon gesehen haben, daß im ersten Falle die Doppelpunkte außerhalb der Strecke rq', im 2ten Falle innerhalb derselben liegen; außerdem zeigt die zweite, daß es nur einen Doppelpunkt gibt, der aber die Stelle von zweien vertritt, sobald die Parallele den Kreis berührt, und gar keine Doppelpunkte, wenn die Parallele den Kreis nicht mehr schneidet.

Lehrsatz 18. Ungleichlaufende Strahlenbüschel haben immer zwei Doppelstrahlen, gleichlaufende nur dann, wenn $p > tg\ {}^1/_2\ st'$: ist $p = tg\ {}^1/_2\ st'$, so haben sie nur einen, ist es $< tg\ {}^1/_2\ st'$ gar keinen Doppelstrahl. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Winkel st' ein spitzer und $p < 1$ sei. Ist $p > 1$, so muß man den spitzen Winkel $s't$ nehmen.

Aus Zusatz 2 zu Lehrsatz 14 ergibt sich sofort für ungleichlaufende Strahlenbüschel, daß bei der Drehung eines Strahles des einen Büschels ihm der entsprechende Strahl zweimal, einmal in dem Raume zwischen s und s', das anderemal in dem Raume t und t' begegnet. Sind dagegen die Strahlenbüschel ungleichlaufende, so kann ein Strahl seinen entsprechenden nur innerhalb des Raumes zwischen s und t' einholen oder von ihm eingeholt werden; wenn es also Doppelstrahlen gibt, so liegen sie innerhalb dieses Raumes.

In der That, wenn μ ein Doppelstrahl ist, so hat man die Relation

$$tg\ \mu s\ .\ tg\ \mu t' = \pm\ p^2$$

und wenn man den Halbirungsstrahl des Winkels st' mit ω bezeichnet

$$tg\ (\mu\omega + \omega s)\ .\ tg\ (\mu\omega + \omega t') = \pm\ p^2$$

oder, weil $\omega t' = -\ \omega s$ ist,

$$tg\ (\mu\omega + \omega s)\ .\ tg\ (\mu\omega - \omega s) = \pm\ p^2 \text{ oder}$$

$$\frac{tg^2\ \mu\omega - tg^2\ \omega s}{1 - tg^2\ \mu\omega\ .\ tg^2\ \omega s} = \pm\ p^2$$

Daraus folgt $$\mathrm{tg}^2\,\mu\omega = \frac{\mathrm{tg}^2\,\omega s \pm p^2}{1 \pm p^2\,.\,\mathrm{tg}^2\,\omega s}$$

Nimmt man das obere Zeichen, d. h. sind die Strahlenbüschel ungleichlaufend, so ist die rechte Seite dieser Gleichung positiv; es ist also auf beiden Seiten von o in gleichem Winkelabstande je ein Doppelstrahl vorhanden. Dies findet auch statt, wenn das untere Zeichen gilt, d. h., wenn die Strahlenbüschel gleichlaufend sind, sobald nur $p < \mathrm{tg}\ \omega s$. Sind aber die Strahlenbüschel gleichlaufend und zugleich $p = \mathrm{tg}\ \omega s$, so fallen die zwei Doppelstrahlen in einen zusammen und zwar in den Strahl ω; ist aber $p > \mathrm{tg}\ \omega s$, so gibt es keine Doppelstrahlen mehr.

Zusatz. Construirt werden die Doppelstrahlen am besten, wenn man die Strahlenbüschel durch eine Transversale schneidet, welche senkrecht auf ω steht. Heißt (Fig. 73) o der Schnittpunkt derselben mit ω, so liegen ihre Schnittpunkte mit s, s' einerseits und t', t andererseits symmetrisch zu o. Denkt man sich nun rechts und links von s zwei Strahlen g und h, die damit einen Winkel bilden, dessen Tangente = p, und ebenso rechts und links von t' zwei Strahlen g' und h', welche denselben Winkel mit t' bilden, wobei die Strahlen in der Ordnung g, h, h', g' aufeinanderfolgen, wenn die Strahlenbüschel ungleichlaufend und in der Ordnung g, h, g', h', wenn sie gleichlaufend sind, so ist

$$\mathrm{tg}\ gs\ .\ \mathrm{tg}\ g't' = \mathrm{tg}\ hs\ .\ \mathrm{tg}\ h't' = \pm\ p^2$$

d. h. die Strahlen g, g' und h, h' sind entsprechende.

Legt man nun durch den Scheitel der Strahlenbüschel einen Parallelstrahl ϱ' mit der Transversalen, so ist der entsprechende Strahl ϱ gegeben durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\ \varrho s\ .\ \mathrm{tg}\ \varrho' t' = \pm\ p^2$$

und da $\varrho' t' = 180^0 - \varrho' s$, so geht diese Gleichung über in

$$-\ \mathrm{tg}\ \varrho s\ .\ \mathrm{tg}\ \varrho' s = \pm\ p^2 \text{ oder}$$

$$\mathrm{tg}\ s\varrho\ .\ \mathrm{tg}\ s\varrho' = \pm\ p^1$$

In dieser Gleichung gilt das obere Zeichen für ungleichlaufende, das untere für gleichlaufende Strahlenbüschel; gleichwohl wird, welches Zeichen wir auch nehmen mögen, der dem ϱ' entsprechende Strahl ϱ derselbe sein, weil ihm das einemal ϱ', das anderemal dessen Verlängerung über den Scheitel des Strahlenbüschels hinaus entspricht. Wenn also ϱ' eine Parallele zur Transversalen ist, so finden wir unter allen Umständen ϱ durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\ \varrho s\ .\ \mathrm{tg}\ s\varrho' = \mathrm{tg}^2\ .\ sg$$

wo statt p sein Werth tg sg gesetzt wurde. Diese Gleichung deutet aber nach der Anmerkung zu Erklärung 2 an, daß der Winkel hg durch ϱ und ϱ' harmonisch getheilt wird.

Sind nun g und h und r die Punkte, in denen die Strahlen g und h und ϱ die Transversale treffen, so muß, weil der Schnittpunkt derselben mit ϱ' unendlich weit entfernt ist, r der Mittelpunkt der Strecke gh sein. Der Punkt r ist aber der Gegenpunkt der einen Punktreihe, der Gegenpunkt g' der anderen Punktreihe liegt auf der andern Seite von o ebensoweit entfernt. Die

Potenz der Punktreihen ist das Quadrat der Hälfte von gh und zwar positiv, wenn die Strahlenbüschel ungleichlaufende, negativ, wenn sie gleichlaufend sind. Es erübrigt jetzt nur noch die Doppelpunkte der Punktreihen nach der Methode des Zusatzes zum vorigen Lehrsatz zu finden; ihre Verbindungslinien mit dem gemeinschaftlichen Scheitel der Strahlenbüschel sind ihre Doppelstrahlen.

Lehrsatz 19. **Fallen in zwei auf einer Graden liegenden Punktreihen die Gegenpunkte zusammen, so entsteht ein involutorisches Punktsystem, dessen Mittelpunkt der Punkt ist, in welchem die Gegenpunkte zusammenfallen.**

In der That, ist o dieser Punkt, so hat man die Relation

$$oa \,.\, oa' = \pm\, p^2$$

welche nach Lehrsatz 2 des §. 14 anzeigt, daß die entsprechenden Punkte a, a', b, b', c, c' ꝛc. ein involutorisches Punktsystem bilden.

Zusatz 1. Wegen der Projectivität der beiden Punktreihen ist allgemein (abcd) = (a'b'c'd'). Sieht man nun den Punkt d', welcher eigentlich der 2ten Punktreihe angehört und welchem der Punkt d der ersten entspricht, als einen Punkt der ersten Punktreihe an, so muß ihm wegen der Relation $od \,.\, od' = \pm\, p^2$ trotzdem noch immer der Punkt d entsprechen, wenn man denselben als Punkt der zweiten Punktreihe auffaßt, d. h. es muß

$$(abcd') = (a'b'c'd)$$

Nimmt man statt d' den Punkt a', so geht diese Gleichung über in

$$(abca') = (a'b'c'a)$$

Nach derselben Schlußweise ist:

$$(abc'd') = (a'b'cd)$$

und $(abc'a') = (a'b'ca)$ ꝛc.

Wenn also aus den beiden Punktreihen ein Punktsystem entstanden ist, so kann man in den Doppelschnittsverhältnissen von je 4 Punkten die Punkte beider Reihen miteinander vertauschen, ohne dadurch ihre Gleichheit aufzuheben. Umgekehrt, wenn diese Vertauschbarkeit in den Doppelverhältnissen stattfindet, ohne daß sie aufhören gleich zu sein, so ist aus den Punktreihen ein Punktsystem geworden. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte man auch nicht mehr die Relation $oa \,.\, oa' = \pm\, p^2$, sondern $ra \,.\, q'a' = \pm\, p^2$ und dann würde man nicht mehr a mit a' vertauschen können, ohne daß der Werth des Produktes $ra' \,.\, p'a$ von $\pm\, p^2$ verschieden wäre; dies widerspricht aber eben der Voraussetzung.

In der That lassen sich die 7 Gleichungen des §. 14, Lehrsatz 2, welche das Vorhandensein einer Involution anzeigen und umgekehrt bestehen, wenn jene Involution vorhanden ist, folgendermaßen schreiben:

$$(ac'b'c) = (a'cbc') \qquad (ab'c'c) = (a'bcc')$$
$$(a'c'b'c) = (acbc') \qquad (bc'a'a) = (b'caa')$$
$$(ac'bc) = (a'cb'c') \qquad (ca'b'b) = (c'abb')$$
$$(acb'c') = (a'c'bc)$$

Zusatz 2. Das Punktsystem ist ein hyperbolisches mit 2 Doppelpunkten, wenn die erzeugenden Punktreihen ungleichlaufende, ein elliptisches ohne Doppelpunkte, wenn dieselben gleichlaufend sind; daß in letzterem Falle keine Doppelpunkte existiren, folgt daraus, daß die Entfernung der Gegenpunkte Null, also kleiner als p ist. Im parabolischen Punktsystem fallen die Doppelpunkte zusammen und die Potenz ist gleich Null. Sind die erzeugenden Punktreihen ähnlich, liegen also die zusammenfallenden Gegenpunkte und folglich auch der Mittelpunkt im Unendlichen, so entsteht das gleichseitige hyperbolische Punktsystem.

Lehrsatz 20. Fallen in zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln, die nichtentsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammen, so entsteht ein involutorisches Punktsystem, dessen Mittelstrahl der Strahl ist, in welche jene zusammenfallen.

Dann schneidet man die erzeugenden Strahlenbüschel wie im Zusatz zu Lehrsatz 16 durch eine Transversale, welche senkrecht steht auf der Halbirungslinie des Winkels st' und läßt dann s mit t' zusammenfallen, so decken sich auch auf der Transversale die entsprechenden Punkte **g**,**h** und **g'**,**h'** und zwar so, daß **g'** auf **h** und **h'** auf **g** zu liegen kommt, wenn die Strahlenbüschel ungleichlaufend sind, aber so, daß **g'** mit **g** und **h'** mit **h** zusammenfällt, wenn die Strahlenbüschel gleichlaufend sind. Da nun die Strecken **gh** und **g'h'** sich decken, so decken sich auch ihre Mittelpunkte d. h. die Gegenpunkte der beiden auf der Transversale entstehenden Punktreihen; daher bilden dieselben ein Punktsystem und die erzeugenden Strahlenbüschel nach Erklärung 2 des §. 14 ein Strahlsystem.

Zusatz 1. Für ein solches Strahlsystem gilt wegen des Zusammenfallens von s und t' im Strahl ω die Relation

$$\text{tg } \omega\alpha \ . \ \text{tg } \omega\alpha' = \pm \ p^2$$

Dieselbe hat statt, ob man α als einen Strahl des ersten Strahlenbüschels und α' als einen des zweiten betrachtet oder umgekehrt. Da nun beide Strahlenbüschel projectivisch sind, so muß das Doppelverhältniß von 4 beliebig aus beiden Büscheln gewählten Strahlen gleich dem Doppelverhältniß der conjugirten Strahlen sein, d. h. es muß

$$(\alpha\beta\gamma\alpha') = (\alpha'\beta'\gamma'\alpha)$$

$$\text{oder } (\alpha\gamma\alpha'\beta') = (\alpha'\gamma'\alpha\beta) \text{ ic.}$$

In der That schneidet eine Transversale das Strahlsystem in einem Punktsystem, für welches nach Zusatz 1 des vorigen Paragraphen die Gleichungen gelten

$$(abca') = (a'b'c'a)$$

$$\text{und } (aca'b') = (a'c'ab) \text{ ic.}$$

woraus wegen der Projectivität des Punkt- und Strahlsystems die obigen

Gleichungen folgen, welche die Vertauschbarkeit conjugirter Strahlen in den Doppelverhältnissen anzeigen.

Zusatz 2. Das Strahlsystem ist ein hyperbolisches mit 2 Doppelstrahlen, wenn die erzeugenden Strahlenbüschel ungleichlaufende, ein elliptisches ohne Doppelstrahlen, wenn dieselben gleichlaufend sind. Im parabolischen Strahlsystem fallen die Doppelstrahlen zusammen und die Potenz ist gleich Null. Ist die Potenz $= + 1$, so hat man, wie aus der letzten Gleichung des §. 16 hervorgeht, wenn man daselbst $\omega s = o$ setzt, für die Doppelstrahlen.

$$\mathrm{tg}^2\, \mu\omega = 1$$

woraus $\mathrm{tg}\, \mu\omega = \pm 1$ folgt, d. h. die Doppelstrahlen bilden mit dem Mittelstrahl rechts und links einen Winkel von 45^0 oder stehen aufeinander senkrecht; außerdem ist

$$\mathrm{tg}\, \omega\alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \omega\alpha' = 1$$

$$\text{oder } \mathrm{tg}\, \omega\alpha = \mathrm{cotg}\, \omega\alpha'$$

d. h. die conjugirten Strahlen liegen auf derselben Seite des Mittelstrahls und ihre Winkel mit demselben ergänzen sich zu 90^0, folglich wird der Winkel zwischen 2 conjugirten Strahlen von einem Doppelstrahl und der Nebenwinkel des ersten durch den andern Doppelstrahl halbirt. Man hat also das gleichseitige hyperbolische Strahlsystem. Ist die Potenz gleich $- 1$, so gibt es keine Doppelpunkte, und man hat jetzt

$$\mathrm{tg}\, \omega\alpha = - \mathrm{cotg}\, \omega\alpha'$$

d. h. die conjugirten Strahlen liegen auf verschiedenen Seiten des Mittelstrahls und ihre Winkel mit denselben ergänzen sich zu 90^0, folglich beträgt der Winkel zwischen je zwei conjugirten Strahlen 90^0. Dies ist das circuläre Strahlenbüschel.

§. 18. Einige Anwendungen der vorhergehenden Lehren.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Lehren geben uns die Mittel an die Hand, eine Menge von Aufgaben und Lehrsätzen leichter zu lösen und zu beweisen, als dies durch die früher bekannten Methoden möglich war. Wir wählen, um dies zu zeigen, im Folgenden größtentheils solche Lehrsätze und Aufgaben aus, die wir schon in früheren Paragraphen von anderen weniger allgemeinen Standpunkten aus behandelt haben.

1. Wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien je zweier entsprechender Ecken sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier

entsprechender Seiten in einer Graden. Vergl. Lehrsatz 8 des Paragraphen 7.

Schneiden sich ab und a'b' in p (Fig. 74) und bc und b'c' in q, und schneidet die Verbindungslinie pq die Graden aa', bb', cc' in a'', b'', c'', so ist zu beweisen, daß der Durchschnittspunkt r von ca und c'a' auf pq liegt. Nun ist, wenn man p als Scheitel eines Strahlenbüschels ansieht,

$$(ob'b''b) = (oa'a''a)$$

und wenn man q als Scheitel ansieht:

$$(ob'b''b) = oc'c''c)$$

Daraus folgt (oa'a''a) = (oc'c''c)

d. h. die Punktreihen o, a', a,'' a und o, c', c'', c sind perspectivisch und die Verbindungslinien entsprechender Punkte, nämlich a'c', a''c'' und ac schneiden sich daher in einem Punkte.

2. Wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, daß die Schnittpunkte je zweier entsprechender Seiten auf einer Graden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien je zweier entsprechender Ecken in einem Punkte. Vergl. Lehrsatz 9 des Paragraphen 7.

Liegen nämlich p, q und r in einer Graden, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke pb'b und rc'c nach vorigem Lehrsatze in einem Punkte q; deßhalb schneiden sich ihre entsprechenden Seiten, nämlich b'b und c'c, bp und cr, pb' und rc' in Punkten o, a und a', die auf einer graden Linie liegen oder die Verbindungslinie von a und a' geht durch den Schnittpunkt o von bb' und cc'.

3. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die zwei auf ihr liegenden Diagonalpunkte harmonisch getheilt. (Fig. 75.)

Da eb, BA und fd sich in dem Punkte a schneiden, so ist

$$(eBfC) = (bAdC)$$

und da ed, BA und fb sich in dem Punkte c schneiden, so ist auch

$$(eBfC) = (dAbC)$$

Daraus folgt

$$(bAdC) = (dAbC) \text{ oder auch}$$
$$(bdAC) = (dbAC)$$

Nun ist aber nach Lehrsatz 1 des vorigen Paragraphen das Doppelverhältniß auf der rechten Seite dieser Gleichung der reciproke Werth des Doppelverhältnisses auf der linken Seite und man hat daher

$$(bdAC) = \pm 1$$

Das positive Zeichen kann nicht gelten, weil sonst

$$\frac{bA}{Ad} = \frac{bC}{Cd}$$

wäre, was nur stattfinden könnte, wenn A und C zusammenfielen; also gilt das negative Zeichen.

4. Der Winkel zwischen den zwei in einem Diagonalpunkt eines vollständigen Vierecks sich schneidenden Seiten wird durch die zwei durch denselben Punkt gehenden Diagonalen harmonisch getheilt.

Man hat in ähnlicher Weise (Fig. 76)

B (bhcC) = B (agdC)

A (bhcC) = A (dgaC) oder auch

B (bhcC) = B (dgaC)

Daraus folgt B (agdC) = B (dgaC)

oder auch B (adgC) = e (dagC)

und daraus ergibt sich wie vorhin B (adgC) = — 1

5. Der Lehrsatz des Pascal.

Derselbe kann durch die Lehre von den Doppelverhältnissen bewiesen werden, wenn man vorerst folgenden Satz festgestellt hat:

Wenn man von 2 Punkten eines Kreises nach denselben 4 Punkten desselben Strahlen zieht, so sind die dadurch entstehenden Strahlenbüschel projectivisch.

Denn der Winkel zwischen je 2 Strahlen ist entweder gleich dem Winkel zaischen den entsprechenden 2 Strahlen als Peripheriewinkel über demselben Bogen oder gleich dem Supplementwinkel desselben; in jedem Falle sind aber ihre Sinusse gleich.

Daher haben in Fig. (77) die Strahlenbüschel 1 (4265) und 3 (4265) gleiches Doppelverhältniß und die Transversalen 54 und 56 werden von ihnen in pxojectivischen Punktreihen geschnitten, nämlich in a, b, c, d und a', b', c', d'. Da nun d mit d' zusammenfällt, so sind diese Punktreihen auch perspectivisch d. h. die Verbindungslinien aa', bb', cc' entsprechender Punkte schneiden sich in einem Punkte oder, was dasselbe ist, der Schnittpunkt von aa' und cc' d. h. von 34 und 16, liegt mit b und b' auf einer Graden; b ist aber der Schnittpunkt von 12 und 45 und b' der Schnittpunkt von 23 und 56.

Ganz in derselben Weise wird der Beweis geführt, wenn auf zwei Graden je drei Punkte des Sechsecks liegen (Fig. 78), indem man davon ausgeht, daß die Strahlenbüschel 1 (4263) und 3 (4263) perspectivisch sind.

Denkt man sich in diesem letzteren Falle eine der beiden Graden z. B. die, auf welcher die Ecken 4, 2, 6 liegen, in unendliche Entfernung gerückt, so werden die Graden 36 und 16, 56 und 54, 12 und 14 parallel; der Satz behält aber auch dann noch seine Richtigkeit. Dies führt zum Beweise des folgenden Lehrsatzes (vgl. Salmon analyt. Geom. der Kegelschnitte pag. 299 Aufgabe 2):

Die Durchschnittspunkte der Höhen der vier Dreiecke, welche durch die vier Seiten eines vollständigen Vierseits gebildet werden, liegen in einer Graden.

Sind nämlich a, b, c, d (Fig. 79) die vier Seiten des Vierseits, so gehen durch die drei Schnittpunkte von a, b, c mit d je zwei Höhen, nämlich durch den Schnittpunkt von c und d die Höhen a_1, b_1, durch den Schnittpunkt von b und d die Höhen a_2, c_2, durch den Schnittpunkt von a und d die Höhen b_3, c_3; die mit gleichen Buchstaben, wenn auch verschiedenen Indices, bezeichneten Höhen sind parallel, so daß a_1 und a_2 den Linien 14 und 54, b_1 und b_3 den Linien 12 und 32 und c_2, c_3 den Linien 16, 36 der vorigen Figur entsprechen. Also liegen die drei Durchschnittspunkte von b_1 und c_2, a_2 und b_3, a_1 und c_3 in gerader Linie; ebenso läßt sich zeigen, daß der 4te Höhedurchschnitt mit je zwei der beiden übrigen in gerader Linie liegt, wodurch der Satz bewiesen ist.

6. der Satz des Brianchon.

Auch dieser Satz läßt sich unabhängig von der Lehre der Polaren durch die der Doppelschnittsverhältnisse beweisen. Zu diesem Behufe müssen wir aber erst den Beweis des folgenden Satzes voranschicken (Fig. 80.)

Zwei von einem Punkte a ausgehende Tangenten eines Kreises o schneiden von einer dritten Tangente ein Stück bb' derart ab, daß der Winkel bob' ein constanter ist, welche Lage die dritte Tangente auch haben mag und zwar ist dieser Winkel gleich einem rechten weniger der Hälfte von bab', wenn die dritte Tangente zwischen dem Kreis und dem Scheitel von bab' liegt, liegt sie aber auf der von a abgewandten Seite des Kreises, so ist er gleich dem Supplementwinkel des vorigen.

Im ersten Falle ist, wenn c und c' die Berührungspunkte der festen Tangenten sind, und d der Berührungspunkt der beweglichen Tangente ist, der Winkel $coc' = cob + bob' + b'oc'$

und da $cob = bod$

und $b'oc' = dob'$

ist, so erhält man $coc' = bod + bob' + dob'$

$$= 2\, bob'$$

Nun ist in dem Viereck acoc'

$$cac' + coc' = 2R$$

daher hat man

$$cac' + 2\, bob' = 2R$$

oder $$bob' = R - \frac{1}{2} cac'.$$

Im zweiten Falle ist der überstumpfe Winkel

$$coc' = co\beta + \beta o\beta' + \beta' oc'$$

und da $co\beta = \beta o\delta$

und $\beta' oc' = \delta o\beta'$

ist, so erhält man $coc' = \beta o\delta + \beta o\beta' + \delta o\beta'$

$$= 2\ \beta o\beta'$$

Nun ist $4R - coc' + cac' = 2R$ oder

$$coc' = 2\ \beta o\beta' = 2R + cac'$$

$$\text{oder} \quad \beta o\beta' = R + \frac{1}{2}\ cac'.$$

Läßt man nun die Tangente bb' sich verschieben, so macht in Folge der Constanz von bob' die neue Lage von ob mit der alten denselben Winkel wie die neue Lage von ob' mit der alten; es entstehen also zwei ähnlich gleiche Strahlenbüschel, die beide ihren Scheitel in o haben, folglich sind die durch sie auf ac und ac' entstehenden Punktreihen projectivisch; geht die Tangente bb' in $\beta\beta'$ über, so ändert sich daran nichts, weil man dann einen rückwärts verlängerten Schenkel von bob' als Strahl betrachten kann.

In dem Brianchon'schen Sechsseit bcfge'b' (Fig. 81) sind daher die Punktreihen bcde und b'c'd'e' projectivisch und wenn man alle Punkte der ersten mit g, die der zweiten mit f verbindet, so entstehen zwei projectivische Strahlenbüschel f(b'c'd'e') und g(bcde), welche den Strahl dd' gemeinschaftlich haben, also perspectivisch sind und sich deshalb mit ihren entsprechenden Strahlen in einer graden Linie schneiden. Es liegen demnach die Durchschnittspunkte von fb' und gb, von fc' und gc d. h. der Punkt c, von fe' und ge d. h. der Punkt e' in grader Linie oder, was das nämliche ist, bg, b'f, ce' schneiden sich in einem Punkte.

In ähnlicher Weise läßt sich der Brianchon'sche Satz für ein Sechsseit beweisen, von dem drei Seiten durch den Punkt p, die andern durch den Punkt p' gehen (Fig. 82).

Die Punktreihen ph65 und p3i4 sind perspectivisch. Macht man 2 und 1 zu Scheiteln von Strahlenbüscheln, deren Strahlen nach diesen Punktreihen gehen, so ist

$$1\,(4i3p) = 2\,(56hp)$$

d. h. diese Strahlenbüschel sind perspectivisch und ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich deshalb in einer Graden. Daher liegt der Durchschnittspunkt von 14 und 25 mit den Durchschnittspunkten von 1i und 26, 13 und 2h in grader Linie oder die Verbindungslinien von 14, 25, 36 schneiden sich in einem Punkte.

7. Der Satz des Desargues. vgl. Lehrsatz 3 des §. 14.

Man hat, wie bei No. 5 bewiesen wurde (Fig. 83)

$$p\,(ama'o) = n\,(ama'o)$$

daher auch $\quad (aba'c') = (aca'b')$

Nun ist aber nach Lehrsatz 1 des vorigen Paragraphen

$$(aca'b') = (a'b'ac)$$

daher ist $\quad (aba'c') = (a'b'ac)$

wodurch der Satz nach Zusatz 1 zu Lehrsatz 17 des vorigen Paragraphen bewiesen ist.

Hat man anstatt eines in den Kreis beschriebenen Vierecks ein solches, welches 2 sich schneidenden Graden eingeschrieben ist, so läßt sich die Gültigkeit des Satzes auf ähnliche Weise darthun. Man hat nämlich

$$p\,(mrd'o) = n\,(mrd'o)$$

daher auch

$$(bdd'c') = (cdd'b')$$
$$= (b'd'dc)$$

8. **Das dualistische Gegenstück dazu. vgl. Lehrsatz 5 des §. 14.**

Die Punktreihen g, a', b, i und fb'ah (Fig. 84) sind, wie bei No. 6 bewiesen wurde, projectivisch. Daher hat man

$$o\,(ga'bi) = o\,(fb'ah)$$

und wenn man die Strahlen selber setzt

$$(\delta\alpha'\beta\delta') = (\delta\beta'\alpha\delta')$$
$$= (\delta'\alpha\beta'\delta)$$

Hat man anstatt eines um den Kreis beschriebenen Vierseits ein solches, welches 2 getrennt liegenden Punkten umschrieben ist, so läßt sich der Satz in ähnlicher Weise beweisen. Denkt man sich nämlich c' als Scheitel eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen nach den Punkten bma'c gerichtet sind, so erkennt man, daß die Punktreihen b, m, a', c und a, l, b', c perspectivisch sind. Zieht man nun von o aus die Strahlen nach diesen Punkten, o folgt augenblicklich

$$(\beta\gamma'\alpha'\gamma) = (\alpha\gamma'\beta'\gamma)$$

oder

$$(\alpha'\gamma\beta\gamma') = (\alpha\gamma'\beta'\gamma)$$

Aufgabe 1. Wenn 2 projectivische Punktreihen auf einer Graden oder 2 concentrische projectivische Strahlenbüschel gegeben sind, die Doppelpunkte, bezüglich die Doppelstrahlen zu finden.

Erster Fall. Es seien auf einer Graden l die Punkte a, b, c der einen Punktreihe und die Punkte a', b', c' der andern gegeben (Fig. 85). Man beschreibe einen beliebigen Kreis und verbinde einen Punkt A desselben mit allen gegebenen Punkten; die Verbindungslinien werden dann den Kreis jede noch in einem zweiten Punkte schneiden. Diese zweiten Schnittpunkte sollen bezüglich α, β, γ und α', β', γ' heißen und entsprechen sich derart, daß, wenn man von einem beliebigen Punkte nach α, β, γ und von demselben oder einem anderen Punkte aus nach α', β', γ' Strahlen zieht, zu dem nach α gezogenen Strahl der nach α' gezogene gehört, ebenso zu dem nach β gezogenen der nach β' gezogene; ebenso wird es sein, wenn man noch eine Anzahl anderer Punkte δ und δ', ε und ε' 2c. nach demselben Gesetze bestimmt und nach ihnen von den erwähnten Punkten aus Strahlen zieht. Dadurch entstehen aber zwei Strahlenbüschel, welche nach Lehrsatz 14 des vorigen Paragraphen projectivisch sind; denn mehr

als ein Strahl des zweiten Büschels kann einem Strahle des ersten Büschels deshalb nicht entsprechen und umgekehrt, weil ja die Punkte α, β, γ und α', β', γ' die zweiten Schnittpunkte von Graden mit dem Kreise sind der Punkt A nicht in Betracht kommt und ein Kreis mit einer Graden nur 2 Schnittpunkte haben kann.

Nimmt man nun zum Scheitel des ersten Strahlenbüschels den Punkt α' und zu dem des zweiten den Punkt α, so sind dieselben nicht bloß projectivisch, sondern auch perspectivisch, weil sie den Strahl $\alpha\alpha'$ gemeinsam haben; daher schneiden sich die entsprechenden Strahlen $\alpha'\beta$ und $\alpha\beta'$, $\alpha'\gamma$ und $\alpha\gamma'$ $\alpha'\delta$ und $\alpha\delta'$ 2c. in einer Graden, welche den Kreis in 2 Punkten λ und μ schneidet. Jeder dieser Punkte z. B. λ ist aber als ein solcher anzusehen, in welchen zwei Punkte λ und λ' zusammenfallen und die entsprechenden Strahlen $\alpha'\lambda$ und $\alpha\lambda'$ sich schneiden; seine Verbindungslinie mit A bestimmt daher auch auf l einen Doppelpunkt m der gegebenen Punktreihen. Da die Grade $\lambda\mu$ schon durch die Schnittpunkte von $\alpha'\beta$ und $\alpha\beta'$ und von $\alpha'\gamma$ und $\alpha\gamma'$ bestimmt ist, so braucht man die Punkte δ, ε 2c. gar nicht zu Hülfe zu nehmen und es genügen 3 gegebene Punkte in jeder Punktreihe.

Zweiter Fall. Hat man die Doppelstrahlen zweier concentrischer projectivischer Strahlenbüschel zu suchen, so lege man den Kreis durch ihren gemeinsamen Scheitel und verfahre ebenso.

Anmerkung. Die Auflösung rührt von Jakob Steiner her, vgl. seine systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten pag. 68 und 174 und seine Theorie der Kegelschnitte bearbeitet von Schröter pag. 46 ff.

Aufgabe 2. Ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch gegebene Punkte gehen und dessen Ecken der Reihe nach in gegebenen Graden liegen.

Es seien vorerst 4 Grade l, l_1, l_2, l_3 und 4 Punkte p, p_1, p_2, p_3 (Fig. 86) gegeben. Man nehme auf l einen Punkt a beliebig an, seine Verbindungslinie mit p treffe l_1 in a_1, die Verbindungslinie von a_1 mit p_1 treffe l_2 tn a_2, die Verbindungslinie von a_2 mit p_2 treffe l_3 in a_3, die Verbindungslinie von a_3 mit p_3 treffe l in a_4. Nimmt man auf l nacheinander eine Reihe von Punkten b, c, d 2c. an und verfährt mit ihnen, ebenso, so erhält man auf l noch eine Reihe weiterer Punkte b_4, c_4, d_4 2c. die so beschaffen sind, daß zu einem Punkte der ersten Reihe immer nur ein Punkt der zweiten Reihe gehört. Deshalb sind nach Lehrsatz 12 die Punktreihen a, b, c, d 2c. und a', b', c', d' 2c. projectivisch. Da nun aber die Aufgabe dann als gelöst zu betrachten ist, wenn sich das Vieleck schließt d. h. wenn ein Punkt der einen Reihe mit seinem entsprechenden zusammenfällt, so hat man nur die Doppelpunkte der beiden Punktreihen zu suchen, was in der Lösung der Aufgabe 1 gelehrt worden ist. Unsere Aufgabe hat also entweder 2 Lösungen oder eine oder keine, je nachdem die Punktreihen zwei

getrennt liegende Doppelpunkte oder einen aus zwei zusammenfallenden entstandenen Doppelpunkt oder keinen besitzt. Die Lösung der Aufgabe 1 zeigt außerdem, daß man von jeder Punktreihe nur drei Punkte braucht, nämlich a, b, c und die entsprechenden a_4, b_4, c_4, mit welchen die oben angegebene Construction zu machen ist.

Die Construction ändert sich nicht, das zu beschreibende Viereck mag so viele Seiten haben als man will; in allen Fällen hat die Aufgabe im Allgemeinen nur zwei Auflösungen. Auch dürfen die gegebenen Punkte theilweise in Graden liegen und die gegebenen Graden theilweise durch dieselben Punkte gehen.

Anmerkung. Auch diese Construction rührt von Jakob Steiner her vgl. system. Entwicklung pag. 94.

Aufgabe 3. In einen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch gegebene Punkte gehen.

Es sei vorerst ein Viereck in den Kreis zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch die Punkte p, p_1, p_2, p_3 gehen sollen.

Man nehme auf dem Kreise einen Punkt a beliebig an; seine Verbindungslinie mit p schneide den Kreis in a_1, die Verbindungslinie von a_1 mit p_1 schneide ihn in a_2, die Verbindungslinie von a_2 mit p_2 in a_3, die Verbindungslinie von a_3 mit p_3 in a_4; ebenso verfahre man mit einer Anzahl anderer Punkte b, c, d ꝛc. des Kreises. Auf diesem erhält man so 2 Reihen von Punkten, die sich gegenseitig entsprechen, nämlich a, b, c, d ꝛc. und a_4, b_4, c_4, d_4. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt o der Ebene mit den Punkten a, b, c, d ꝛc. durch Strahlen und einen anderen Punkt o' mit den entsprechenden Punkten a_4, b_4, c_4, d_4 durch Strahlen, so entstehen 2 Strahlenbüschel, die so beschaffen sind, daß jedem Strahle des einen Büschels ein aber auch nur ein Strahl des andern Büschels entspricht und welche daher nach Lehrsatz 14 des vorigen Paragraphen projectivisch sind. Da nun die Aufgabe offenbar gelöst ist, wenn das Viereck sich schließt, d. h. wenn ein Punkt der ersten Reihe mit seinem entsprechenden zusammenfällt, so verlege man den Punkt o' nach o und suche die Doppelstrahlen der beiden jetzt concentrischen Strahlenbüschel, was in Aufgabe 1 gelehrt wurde. Leichter noch ist die Construction, wenn man den Punkt o nach a_4 und den Punkt o_1 nach a verlegt; die beiden Strahlenbüschel sind dann nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch, weil sie den Strahl aa_4 gemeinsam haben und ihre entsprechenden Strahlen a_4b und ab_4, a_4c und ac_4, a_4d und ad_4 ꝛc. schneiden sich deshalb in einer Graden, welche den Kreis in 2 Punkten λ und μ trifft. Jeder dieser Punkte z. B. λ ist aber als ein doppelter Punkt anzusehen, in welchem 2 Punkte λ und λ_4 zusammenfallen und die entsprechenden Strahlen $a_4\lambda$ und $a\lambda_4$ sich schneiden; in ihm schließt sich also das Viereck.

Daß man in ähnlicher Weise für ein Vieleck von mehr als vier Seiten verfahren kann, ergibt sich leicht; die Aufgabe hat in allen Fällen im All-

gemeinen 2 Auflösungen, von denen 2 zusammenfallen, wenn die Grade $\lambda\mu$ zur Tangente wird; schneidet diese Grade den Kreis nicht, so gibt es keine Auflösung. Wenn die gegebenen Punkte theilweise oder ganz auf Graden liegen, so ändert das nichts an der Construction.

Aufgabe 4. Um einen Kreis ein Vielseit zu beschreiben, dessen Ecken der Reihe nach auf gegebenen Graden liegen.

Auch hier sei vorerst ein Vierseit um den Kreis zu beschreiben, dessen Ecken der Reihe nach auf den Graden l, l_1, l_2, l_3 liegen sollen.

Man ziehe an den Kreis beliebig eine Tangente α, welche die Grade l in p schneidet, ziehe von p eine Tangente α_2, welche l_1 in p_1 schneidet, ziehe von p_1 eine Tangente α_3, welche l_2 in p_2 schneidet und von p_2 eine Tangente α_4, welche l_3 in p_3 schneidet; ebenso verfahre man mit einer Anzahl anderer Tangenten β, γ, δ 2c. des Kreises. Man erhält so zwei Gruppen von Tangenten, die sich gegenseitig entsprechen, nämlich α, β, γ. δ 2c. und α_4, β_4, γ_4, δ_4 2c. Schneidet man die erste Gruppe durch eine beliebige Grade n und die zweite Gruppe durch eine andere Grade n_1, so entstehen zwei Punktreihen, die so beschaffen sind, daß jedem Punkt der einen Reihe ein aber auch nur ein Punkt der anderen Reihe entspricht und welche daher nach Lehrsatz 12 des vorigen Paragraphen projectivisch sind. Da nun die Aufgabe offenbar gelöst ist, wenn das Vierseit sich schließt, d. h. wenn eine Tangente der ersten Reihe mit ihrer entsprechenden zusammenfällt, so lasse man die Grade n_1 mit n zusammenfallen und suche die Doppelpunkte der beiden jetzt auf einer Graden liegenden projectivischen Punktreihen, was in Aufgabe 1 gelehrt wurde. Leichter noch ist die Construction, wenn man die Grade n mit der Tangente α_4 und die Grade n_1 mit der Tangente α zusammenfallen läßt; die beiden Punktreihen sind dann nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch, weil sie den Durchschnitt von α und α_4 gemeinsam haben; die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte (der Schnittpunkt von α_4 und β entspricht dem Schnittpunkt von α und β_4, der Schnittpunkt von α_4 und γ dem von α und γ_4 2c.) schneiden sich deshalb in einem Punkte, von welchem 2 Tangenten λ und μ an den Kreis möglich sind. Jede dieser Tangenten z. B. λ ist aber so anzusehen, als ob in ihr zwei Tangenten λ und λ_4 aus beiden Gruppen zusammenfielen, da auf ihr zwei entsprechende Punkte, nämlich der Schnittpunkt von α_4 und λ und von α und λ_4, liegen; durch sie schließt sich also das Viereck.

Heißen die Berührungspunkte der Tangenten α, α_1, α_2, α_3, α_4 nach der Reihe a, a_1, a_2, a_3, a_4, ebenso die Berührungspunkte der Tangenten β, β_1, β_2, β_3, β_4 nach der Reihe b, b_1, b_2, b_3, b_4 2c., so spielen die Punkte a, a_4, b, b_4, c, c_4, d, d_4 2c. dieselbe Rolle wie die gleichnamigen Punkte der vorigen Aufgabe; denn das Vierseit schließt sich nur dann, wenn einer der Punkte a, b, c, d mit einem der Punkte der Reihe a_4, b_4, c_4, d_4 zu-

sammenfällt; man kann daher auch, um unsere Aufgabe zu lösen, auf die Berührungspunkte die Construction der vorigen Aufgabe anwenden.

Wie beim Vierseit verfährt man bei jedem Vielseit; die Aufgabe hat im Allgemeinen 2 Auflösungen, von denen 2 zusammenfallen, wenn der Punkt, von dem aus die Tangenten λ und μ gezogen werden sollen, auf dem Kreis liegt; liegt dieser Punkt innerhalb des Kreises, so ist eine Auflösung unmöglich. Wenn die gegebenen Graden theilweise oder ganz durch einen und denselben Punkt gehen, so ändert das nicht die Construction.

Anmerkung. Die Lösung der beiden letzten Aufgaben hat Poncelet gegeben, vgl. Magnus Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie pag. 182 und 198.

Aufgabe 5. Auf einer Graden sind die Strecken aa', bb', cc' gegeben; man soll einen Punkt suchen, von welchem sie alle drei unter dem nämlichen Winkel erscheinen.

Man denke sich der Punkt m sei gefunden (Fig. 87) und durch die Strahlen α, β, γ und α', β', γ' bezüglich mit den Punkten a, b, c und a', b', c' verbunden, so bilden die Strahlen α und α', β und β', γ und γ' gleiche Winkel, die nach derselben Drehungsrichtung zu nehmen sind. Nimmt man nun noch einen vierten Strahl δ an, welcher die gegebene Grade in d schneidet und bestimmt dazu den entsprechenden Strahl δ' dadurch, daß man ihn denselben Winkel mit δ und zwar auch nach derselben Drehungsrichtung hinmachen läßt, und schneide dieser Strahl die gegebene Grade in d', so hat man zwei concentrische gleichlaufende gleiche und ähnliche Strahlenbüschel und ihnen entsprechend auf der Graden zwei sowohl mit den Büscheln als unter sich projectivische Punktreihen a, b, c, d und a', b', c', d'. Legt man den vierten Strahl δ parallel mit der gegebenen Graden, und zwar von m aus nach links hingerichtet, so ist der Punkt d' der Gegenpunkt r der ersten Punktreihe; denkt man sich aber den Strahl δ' parallel mit den gegebenen Graden nach rechts gerichtet, so erhält man im Punkte d den Gegenpunkt q_1 der anderen Punktreihe. Zieht man nun von m aus einen Strahl ω senkrecht auf die Grade, welcher dieselbe in o schneidet, so sind die Dreiecke mor und moq_1 congruent, und daher o der Mittelpunkt der Strecke rq_1. Construirt man zu ω durch Anlegen des constanten Winkels nach derselben Seite hin den entsprechenden Strahl ω', welcher die Grade in o' schneidet, so ist das Dreieck ro'm in m rechtwinklig; denn bezeichnet man den constanten Winkel mit α, so ist Winkel rmo $= 90^0 - \alpha$ und da Winkel omo' $= \alpha$ ist, so ist die Summe beider gleich einem Rechten. Daraus ergibt sich folgende Construction:

Man suche die Gegenpunkte r und q_1 der beiden Punktreihen, wozu von jeder nur die drei ersten gegebenen Punkte nothwendig sind, halbire ihren Abstand durch den Punkt o und suche zu diesem Punkte den entsprechenden o'; alsdann construire man über ro' als Durchmesser einen Kreis.

Seine Durchschnittspunkte mit der in o errichteten Senkrechten haben die verlangte Eigenschaft.

In der That bilden die entsprechenden Strahlen mf und mr, mo und mo', mq_1 und mg denselben Winkel α miteinander und bestimmen also zwei concentrische gleichlaufende ähnlichgleiche Strahlenbüschel, in welchen alle entsprechenden Strahlen α und α', β und β', γ und γ' denselben Winkel α einschließen müssen.

Zusatz. Concentrische gleichlaufende ähnlichgleiche Strahlenbüschel können keine Doppelstrahlen besitzen, weil jeder Strahl seinem entsprechenden in demselben Winkelabstande vorangeht oder nachfolgt. Hätten nun die gegebenen Punktreihen Doppelpunkte, so müßten auch die von m ausgehenden mit den Punktreihen projectivischen Strahlenbüschel Doppelstrahlen besitzen, könnten also nicht ähnlich gleich sein. Die Aufgabe ist deshalb nur dann lösbar, wenn die gegebenen Punktreihen keine Doppelpunkte besitzen.

Der Gaußische Lehrsatz. Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Graden.

Dieser Satz ist schon früher Aufgabe 9 des §. 7 bewiesen worden; wir wollen jetzt den Beweis von einem anderen Standpunkte aus führen.

Verbindet man die beiden Mittelpunkte l und m der Diagonalen aa' und bb' durch eine Grade und zieht von dem unendlich fernen Punkte derselben Strahlen nach a, a', b, b', c, c' so sind diese parallel und bilden nach Zusatz zu Lehrsatz 5 des §. 14 ein involutorisches Strahlenbüschel, das von irgend einer Transversalen, also auch von einer beliebigen Senkrechten zu lm in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird; der Schnittpunkt von lm mit dieser Senkrechten sei o und die involutorischen Punktpaare bezüglich $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. Weil aber lm durch die Mittelpunkte von aa' und bb' geht, so muß auch $\alpha o = o\alpha'$, $\beta o = o\beta'$ sein; die Punktreihe ist daher nach Zusatz 2 zu Lehrsatz 1 des §. 14 eine gleichseitig hyperbolische, deren einer Doppelpunkt o ist; es muß also auch $\gamma o = o\gamma'$ sein, folglich liegt der Mittelpunkt von cc' d. h. n auf der Graden lm.

Der Bodenmiller'sche Lehrsatz. Die drei über den Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmesser beschriebenen Kreise haben dieselben Potenzlinie.

Erster Fall. Die über den Diagonalen als Durchmesser beschriebenen Kreise schneiden sich (Fig. 89).

Verlegt man den Punkt r des Zusatzes zu Lehrsatz 5 des §. 14 in einem der Durchschnittspunkte von zwei Kreisen, die über zwei Diagonalen des Vierseits z. B. über bb' und cc' als Durchmesser beschrieben sind, so bilden auch jetzt noch die Strahlen, die nach den 6 Eckpunkten des Vierseits von r aus gezogen sind, ein involutorisches Strahlsystem. Die conjugirten Strahlen zweier Paare desselben, nämlich rb, rb' und rc, rc' stehen aber aufeinander senkrecht, folglich auch nach Zusatz 2 zu Lehrsatz 4 des §. 14

die conjugirten Strahlen des dritten Paares, daher geht der über aa' als Durchmesser beschriebene Kreis ebenfalls durch den Durchschnittspunkt r der beiden Kreise; das nämliche läßt sich von dem zweiten Durchschnittspunkte r' derselben nachweisen.

Zweiter Fall. Die über den Diagonalen als Durchmessern beschriebenen Kreise schneiden sich nicht (Fig. 90).

Sind f, g und h die gegenseitigen Durchschnitte der drei Diagonalen, ferner K der Mittelpunkt und r der Halbmesser des um das Diagonalendreieck fgh beschriebenen Kreises, und endlich l, m und n die Mittelpunkte der Diagonalen aa', bb', cc', so hat man, weil aa' durch f und g harmonisch getheilt wird,

$$la^2 = lg \,.\, lf$$

und weil lg . lf die Potenz des Punktes l in Bezug auf den Kreis K ist

$$lg \,.\, lf = lK^2 - r^2$$

Daraus folgt aber

$$la^2 = lK^2 - r^2$$

Ebenso erhält man:

$$mb^2 = mK^2 - r^2$$
$$nc^2 = nK^2 - r^2$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man eine von der andern subtrahirt,

$$la^2 - lK^2 = mb^2 - mK^2 = nc^2 - nK^2$$

was nichts anderes heißt, als daß die Tangenten von K an die drei Kreise gleich sind. Der Punkt K ist deshalb ein Punkt gleicher Potenz für die drei Kreise. Die Potenzlinie zweier der gegebenen Kreise ist nun die von dem Punkte K auf ihre Centrale gefällte Senkrechte; da aber nach dem Gaußischen Lehrsatz die Centralen der 3 Kreise zusammenfallen, so fallen auch ihre Potenzlinien zusammen und die gemeinschaftliche Potenzlinie geht durch den Mittelpunkt des dem Diagonalendreieck umschriebenen Kreises. Der Beweis hätte in der nämlichen Weise auch für den ersten Fall geführt werden können, vgl. Witzschel Grundlinien der neueren Geometrie pag. 123 ff.

§. 19. Die perspectivische oder collineare Lage von Figuren.

Vorbereitende Sätze und Erklärungen. Wenn man von einem Punkte C des Raumes nach einem Punkte in einer Ebene E eine Grade zieht, so trifft dieselbe eine zweite Ebene E' in einem Punkte, den man den entsprechenden des ersten nennt. Verfährt man so mit allen Punkten der Ebene E, so erhält man auf der Ebene E' ebensoviele denselben entsprechende Punkte. Die Verbindungslinien je zweier einander entsprechenden Punkte gehen also durch den Punkt C. Legt

man ferner durch den Punkt C und eine Grade der Ebene E eine Ebene, so schneidet dieselbe die Ebene E' wieder in einer Graden, welche die entsprechende der ersten heißt. Zwei entsprechende Grade schneiden sich in einem Punkte der Schnittlinie S der Ebenen E und E'; man nennt deshalb letztere die Begegnungsgrade. Dem Durchschnittspunkte zweier Graden in der Ebene E entspricht der Durchschnittspunkt der entsprechenden Graden in der Ebene E' und der Verbindungslinie zweier Punkte in der Ebene E die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in der Ebene E'. Von einer Figur in der Ebene E entsteht auf diese Weise ein perspectivisches Bild in der Ebene E'. Wir nennen deshalb die Ebene E die Originalebene und die Ebene E' die Bildebene, den Punkt C das Centrum der Perspective.

Legt man durch das Centrum C parallel mit der Bildebene eine Ebene, welche die erstere in der Graden R schneidet, und zieht in derselben von C aus Strahlen nach Punkten der Originalebene, so liegen die entsprechenden Punkte der Bildebene im Unendlichen; legt man aber durch C parallel mit der Originalebene eine Ebene, welche die Bildebene in der Graden Q' schneidet und zieht in derselben von C aus Strahlen nach Punkten der Bildebene, so liegen die entsprechenden Punkte der Originalebene im Unendlichen. Die beiden Graden R und Q' sind parallel der Begegnungsgraden S und heißen die Verschwindungsgraden der Original- und Bildebene.

Lehrsatz 1. Das Bild eines Strahlenbüschels, welches seinen Scheitel in der Verschwindungsgraden R hat, ist ein System von Parallellinien.

Im Allgemeinen ist das Bild eines Strahlenbüschels, wie leicht zu erweisen, wiederum ein Strahlenbüschel. Liegt nun der Scheitel des ersten auf R, so liegt das Bild des Scheitels im Unendlichen, d. h. alle Strahlen des entsprechenden Strahlenbüschels schneiden sich im Unendlichen oder sind parallel.

Zusatz. Liegt der Scheitel eines Strahlenbüschels in der Bildebene auf der Verschwindungsgraden Q'; so ist aus den nämlichen Gründen sein Original ein System von Parallellinien.

Lehrsatz 2. **Das Bild eines Kreises ist ein Kegelschnitt und das Bild einer Tangente des Kreises eine Tangente des Kegelschnitts.**

Denn die Strahlen nach allen Punkten der Peripherie des Kreises bilden den Mantel eines Kegels mit kreisförmiger Basis, welcher von der Bildebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird, welcher nur in einem speciellen Falle wieder ein Kreis ist. Die Tangente an den Kreis in der Originalebene ferner ist die Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte desselben, also ist die entsprechende Grade die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte des Kegelschnitts, welche ebenfalls unendlich nahe beisammen liegen, d. h. eine Tangente desselben.

Zusatz. Das Bild einer Sehne des Kreises ist eine Sehne des Kegelschnitts und das Bild der Tangenten in den Endpunkten der Sehne des Kreises sind zwei Tangenten in den Endpunkten der Kegelschnittssehne. Alle Sätze über Pol und Polare beim Kreise werden deshalb durch perspectivische Projection auch auf Kegelschnitte übertragbar; in ähnlicher Weise verhält es sich mit dem Pascal'schen und Brianchon'schen Lehrsatz und noch vielen anderen, die sich bloß auf Lagenverhältnisse beziehen oder von der Größe und dem Verhältniß von Doppelverhältnissen abhängen; denn das Doppelverhältniß von 4 Punkten einer Graden oder von 4 Strahlen eines Büschels wird, wie leicht zu erweisen ist, durch perspectivische Projection nicht geändert. Solche Eigenschaften von Figuren, welche sich durch perspectivische Projection nicht ändern, heißen deshalb projectivische.

Lehrsatz 3. **Dreht man die Bildebene um die Begegnungsgrade S und läßt dabei das Bild auf derselben unverändert, so laufen in jeder Lage der Bildebene die Verbindungsgraden entsprechender Punkte in einem Punkte zusammen.**

Legt man (Fig. 91) durch das Centrum C der Projection eine Ebene λ senkrecht auf Original- und Bildebene, welche dieselben in den Graden l und l' schneidet, und zieht in derselben beliebige 4 Strahlen Cf, Cg, Ch, Ci nach den Punkten f, g, h, i der Originalebene, so werden dieselben die Bildebene in den entsprechenden Punkten f', g', h', i' schneiden. Die Punkte f, g, h, i und f', g', h', i' bilden perspectivische Punktreihen auf l und l'; dreht man daher die Bildebene, so schneiden sich ff', gg', hh', ii' jetzt wieder in einem Punkte C'. Bei dieser Drehung hat sich aber auch der außerhalb der Ebene λ liegende Punkt a' der Bildebene, welcher dem Punkte a der Originalebene entspricht, von seinem Platze bewegt, aber so, daß f'a' und fa, g'a' und ga sich immer noch bezüglich denselben in Punkten der Begegnungsgraden schneiden. Weil nun ff' und gg' durch C' gehen, so werden auch die durch f'a' und fa, g'a' und ga gelegten Ebenen durch diesen Punkt gehen, folglich auch ihre Schnittlinie aa'. Das Nämliche läßt sich für jedes andere Paar entsprechender Punkte beweisen.

Zusatz 1. Zieht man in der ursprünglichen Lage des Systems Parallelen von C aus mit l und l', so treffen dieselben diese Graden in den Gegenpunkten r und q' der auf ihnen liegenden Punktreihen; dasselbe findet statt, wenn man bei einer anderen Lage der Bildebene von C' aus Parallelen mit l und l' zieht. Da aber nur die Neigung der Träger der Punktreihen, nicht die Punktreihen selbst sich geändert haben, so bleiben auch die Gegenpunkte r und q' unverändert; dieselben liegen auf den Verschwindungsgraden R und Q', welche deshalb ebenfalls unveränderlich für jede Lage der Bildebene sind. Es dreht sich daher das Centrum C auf einem Kreise, dessen Ebene λ senkrecht steht auf Original- und Bildebene, dessen Mittelpunkt in der Verschwindungsgraden R liegt und dessen Radius gleich ist der Entfernung der Verschwindungsgraden Q' von der Begegnungsgraden S.

Zusatz 2. Der Lehrsatz gilt auch dann noch, wenn man die Bildebene so lange dreht, bis sie mit der Originalebene zusammenfällt, was auf doppelte Weise geschehen kann, weil auch die Drehung in entgegengesetzter Richtung freisteht. Die Gültigkeit des Lehrsatzes läßt sich übrigens für diesen speciellen Fall auch noch folgendermaßen darthun. Betrachtet man nämlich beliebige 3 Punkte a, b, c und ihre entsprechenden a', b', c', so bewegen sich bei der Drehung der Bildebene die Graden ab und a'b', bc und b'c', ca und c'a' um feste Punkte von S, die sich nicht ändern, auch wenn die Bildebene mit der Originalebene zusammenfällt. Daher schneiden sich nach Lehrsatz 2 des §. 18 aa', bb', cc', die jetzt in einer Ebene liegen, in einem Punkte C'. In dem nämlichen Punkte C' müssen sich aber, wenn man noch einen beliebigen vierten Punkt d und seinen entsprecherden d' hinzunimmt, bb', cc' und dd' schneiden. Die Verschwindungsgraden R und Q' fallen jetzt natürlich auch in die Originalebene und C' ist soweit von R entfernt als Q' von S.

Lehrsatz 4. Legt man eine Ebene parallel der Bildebene in dem nämlichen Abstande vom Centrum der Projection, welchen dieses von der Bildebene hat und betrachtet dieselbe als eine zweite Bildebene, so ist das auf ihr entstehende Bild congruent mit dem auf der ersten Bildebene liegenden, aber symmetrisch liegend und entsprechende Grade der beiden Bilder sind parallel.

Der Beweis ist leicht.

Lehrsatz 5. Dreht man beide Bildebenen um ihre Begegnungsgraden S und S' so, daß sie immer einander parallel bleiben, so bleibt jeder Punkt der Originalebene mit seinen beiden entsprechenden Punkten in den beiden Bildebenen in grader Linie und alle Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich immer noch in einem Punkte.

Daß die Linien, welche jeden Punkt der Originalebene mit seinem entsprechenden in der ersten Bildebene verbinden, auch nach der Drehung der letzteren sich immer noch in einem Punkte C′ schneiden, hat Lehrsatz 3 gelehrt; dasselbe gilt auch von den Linien, welche jeden Punkt der Originalebene mit seinem entsprechenden in der zweiten Bildebene verbinden; ihr Schnittpunkt sei C″. Da nun aber C′ und C″ in derselben Ebene λ liegen, die Verschwindungsgrade R beiden Bildebenen gemeinschaftlich ist, die Entfernung der Verschwindungsgraden Q′ der ersten Bildebene von ihrer Begegnungsgraden S so groß ist wie die Entfernung der Verschwindungsgraden Q″ der zweiten Bildebene von ihrer Begegnungsgraden S′ und endlich der Drehungswinkel von C′ und S so groß ist wie der Drehungswinkel von C″ und S′ nämlich gleich dem gemeinschaftlichen Drehungswinkel beider Bildebenen, so fallen C′ und C″ zusammen.

Zusatz. Dreht man beide Bildebenen in der angegebenen Weise so lange bis sie mit der Originalebene zusammenfallen, was auf doppelte Weise geschehen kann, so verliert der Lehrsatz seine Gültigkeit nicht. Zum zweiten Bilde gehört dann eine Begegnungsgrade S′, welche ebensoweit von R, das beiden Bildern gemeinschaftlich ist, absteht, als R von S, und eine Verschwindungslinie Q″, die ebensoweit von C absteht, als C von Q′.

Erklärung. Wenn zwei Figuren in derselben Ebene eine solche Beziehung zu einander haben, daß jedem Punkte der einen Figur, welcher auf einem Strahl eines Strahlenbüschels mit dem Scheitel C liegt, auf demselben Strahl ein Punkt der zweiten Figur derart entspricht, daß die Verbindungslinien von je zwei Punkten der einen Figur mit den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der anderen Figur d. h. daß die Graden der einen Figur mit den entsprechenden Graden der anderen Figur sich in Punkten schneiden, die auf einer Graden S liegen, so nennt man die Figuren perspectivisch- oder collinear liegende oder homologe Figuren. Der Scheitel C des Strahlenbüschels heißt Collineationscentrum, die Grade S Collineationsaxe.

Lehrsatz 6. Wenn zwei collinear liegende Figuren gegeben sind, so kann man sie noch auf dreifache Weise in collineare Lage bringen (Fig. 92).

1) Man drehe die eine Figur um die Collineationsaxe S um einen Winkel von 180°.

Dies folgt aus Zusatz 2 zu Lehrsatz 3.

2) Man drehe in derselben Ebene die eine Figur um das

Collineationscentrum C, bis sie einen Winkel von 180° beschrieben hat.

Dies folgt aus dem Zusatz zu Lehrsatz 5.

3) Man drehe die eine Figur, nachdem sie die in No. 1 beschriebene Lage erhalten hat, noch einmal in derselben Ebene um das Collineationscentrum, bis sie einen Winkel von 180° beschrieben hat.

Dies folgt aus No. 2.

Lehrsatz 7. In collinearliegenden Figuren sind entsprechende Grade parallel, wenn eine von ihnen der Collineationsaxe parallel ist.

Denn da die eine die Collineationsaxe im Unendlichen schneidet, so muß es auch die andere thun.

Aufgabe 1. Wenn eine Figur vollständig und von der mit ihr collinear liegenden drei Punkte, welche drei bestimmten Punkten der ersten Figur entsprechen, sowie das Collineationscentrum gegeben sind, die übrigen Punkte der zweiten Figur zu bestimmen.

Wenn die gegebenen Punkte a', b', c' (Fig. 93) der zweiten Figur den Punkten a, b, c der ersten entsprechen, so daß aa', bb', cc' sich in C schneiden, so schneiden sich nach Lehrsatz 1 des §. 18 ab und a'b', bc und b'c', ca und c'a' in Punkten, die auf einer Graden S liegen; dies ist die Collineationsaxe. Nimmt man nun einen vierten Punkt d der ersten Figur, verbindet ihn mit c durch eine Grade, welche die Collineationsaxe in p schneide und verbindet p mit c' durch eine Grade, so schneidet diese den Strahl, auf welchem d liegt, in dem entsprechenden Punkte d'. So kann man nach und nach eine Reihe von Punkten der zweiten Figur aus den entsprechenden der ersten herleiten.

Zusatz. Liegt der Punkt d auf der Collineationsaxe, so fällt d' mit ihm zusammen. In der Collineationsaxe fallen also die Punkte des einen Systems mit den entsprechenden des andern zusammen, und da die Verbindungslinien entsprechender Punkte entsprechende Grade sind, so ist die Collineationsaxe sich selbst entsprechend und eine beiden Systemen gemeinsame Grade.

Aufgabe 2. Wenn eine Figur vollständig und von der mit ihr collinear liegenden 3 Grade, welche drei bestimmten Graden der ersten entsprechen, sowie die Collineationsaxe gegeben sind, die übrigen Graden der zweiten Figur zu bestimmen.

Wenn die gegebenen Graden α', β', γ' (Fig. 93) der zweiten Figur den Graden α, β, γ der ersten entsprechen, so daß die Schnittpunkte von α und α', β und β', γ und γ', die wir mit $\alpha \cdot \alpha'$, $\beta \cdot \beta'$, $\gamma \cdot \gamma'$ bezeichnen wollen, auf S liegen, so schneiden sich nach Lehrsatz 2 des §. 18 die Verbindungslinien der Punkte $\alpha \cdot \beta$ und $\alpha' \cdot \beta'$, $\beta \cdot \gamma$ und $\beta' \cdot \gamma'$, $\gamma \cdot \alpha$ und $\gamma' \cdot \alpha'$ in einem Punkte C; dieser ist das Collineationscentrum. Nimmt man nun eine vierte Grade δ der ersten Figur, welche γ in einem Punkte schneide, der auf dem Strahl π liege, so ziehe man vom Schnittpunkte der Graden δ mit der Collineationsaxe nach dem Schnittpunkt von γ' mit π eine Grade, so ist diese die der Graden δ entsprechende δ'.

Zusatz. Geht der Strahl δ durch das Collineationscentrum, so fällt δ' mit ihm zusammen. Daraus geht hervor, daß jeder Strahl eine sich selbst entsprechende Grade ist. Jedoch fällt auf einem Strahl nicht jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammen; dies geschieht nur in dem Durchschnittspunkte des Strahls mit der Collineationsaxe nach vorigem Zusatz und im Collineationscentrum, weil es der Durchschnittspunkt von lauter sich selbst entsprechenden Graden ist; das letztere ist also ein sich selbst entsprechender Punkt.

Lehrsatz 8. Das Doppelverhältniß von vier in einer Graden liegenden Punkten einer Figur ist gleich dem Doppelverhältniß der entsprechenden vier Punkte der collinearliegenden Figur.

Denn zieht man nach den Punkten der ersten Figur von C aus Strahlen, so gehen dieselben durch die entsprechenden ebenfalls auf einer Graden liegenden Punkte des zweiten Systems, beide Punktreihen sind also perspectivisch.

Lehrsatz 9. Das Doppelverhältniß von vier durch einen Punkt gehenden Graden einer Figur ist gleich dem Doppelverhältniß der entsprechenden vier Graden der collinear liegenden Figur.

Denn die entsprechenden Graden schneiden sich alle in Punkten der Collineationsaxe, daher sind beide Strahlenbüschel perspectivisch.

Lehrsatz 10. Das Doppelverhältniß von 4 Punkten eines von C ausgehenden Strahls, von denen der erste das Collineationscentrum, der zweite der Schnittpunkt des Strahls mit der Collineationsaxe und die zwei übrigen entsprechende Punkte sind, ändert sich weder von Strahl zu Strahl noch von einem Paar entsprechender Punkte zu einem andern Paar auf dem nämlichen Strahl. Man nennt dasselbe die Cha-

racteristik oder den **Modulus** des Systems und bezeichnet es mit Δ.

Auf einem Strahl $C\alpha$ (Fig. 94), der die Collineationsaxe in α schneidet, seien zwei Paare entsprechender Punkte a, a' und b, b' gegeben, so folgt aus Lehrsatz 9, da C und α sich selbst entsprechende Punkte sind

$$(C\alpha ab) = (C\alpha a'b')$$

oder:

$$\frac{Ca}{a\alpha} : \frac{Cb}{b\alpha} = \frac{Ca'}{a'\alpha} : \frac{Cb'}{b'\alpha}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{Ca}{a\alpha} : \frac{Ca'}{a'\alpha} = \frac{Cb}{b\alpha} : \frac{Cb'}{b'\alpha}$$

oder $$(C\alpha aa') = (C\alpha bb)$$

Dieses Resultat kann übrigens auch direct gewonnen werden. Denn denkt man sich einen zweiten Strahl, welcher die Collineationsaxe in β schneidet und auf welchem die entsprechenden Punkte c und c' liegen und verbindet nacheinander a und b mit c und a' und b' mit c', so entstehen zwei Paare entsprechender Graden, die sich in zwei Punkten der Collineationsaxe schneiden; nimmt man dieselben nacheinander zu Scheiteln von Strahlenbüscheln, so hat man

$$(C\beta cc') = (C\alpha aa')$$
$$(C\beta cc') = (C\alpha bb')$$

woraus folgt $$(C\alpha aa') = (C\alpha bb') = (C\beta cc') = \Delta.$$

Zusatz. Aus der zuerst erhaltenen Gleichung

$$(C\alpha ab) = (C\alpha a'b')$$

folgt, daß alle auf einem Strahl liegenden Punkte der einen Figur und alle auf demselben Strahl liegenden entsprechenden Punkte der collinearliegenden Figur zwei projectivische Punktreihen bilden, deren Doppelpunkte das Collineationscentrum und der Durchschnittspunkt des Strahls mit der Collineationsaxe sind. Die Gegenpunkte dieser Punktreihen werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(C\alpha r\infty') = (C\alpha\infty q') = \Delta$$

woraus folgt:

$$\frac{Cr}{r\alpha} : \frac{C\infty'}{\infty'\alpha} = \Delta \text{ oder } \frac{Cr}{r\alpha} = -\Delta$$

$$\text{und } \frac{C\infty}{\infty\alpha} : \frac{Cq'}{q'\alpha} = \Delta \text{ oder } \frac{q'\alpha}{Cq'} = -\Delta$$

Da nun sowohl das Verhältniß $\frac{Cr}{r\alpha}$ als auch das Verhältniß $\frac{q'\alpha}{Cq'}$ von Strahl zu Strahl constant $= -\Delta$ bleibt, so liegen alle Gegenpunkte der einen Figur auf einer zur Collineationsaxe parallelen Graden R und ebenso alle Gegenpunkte der collinearliegenden Figur auf einer zur Collineationsaxe parallelen Graden Q'. Man nennt diese beiden Parallelen die **Gegenaxen** der collinearliegenden Figuren.

Aus $\frac{Cr}{r\alpha} = \frac{q'\alpha}{Cq'}$ ergibt sich ferner

$$\frac{Cr + r\alpha}{r\alpha} = \frac{Cq' + q'\alpha}{Cq'} \text{ oder}$$

$$\frac{C\alpha}{r\alpha} = \frac{C\alpha}{Cq'}$$

d. h. $r\alpha = Cq'$

Ebenso findet man aus

$$\frac{r\alpha}{Cr} = \frac{Cq'}{q'\alpha}$$

$$\frac{Cr + r\alpha}{Cr} = \frac{Cq' + q'\alpha}{q'\alpha} \text{ oder}$$

$$\frac{C\alpha}{Cr} = \frac{C\alpha}{q'\alpha}$$

d. h. $Cr = q'\alpha$.

Nimmt man den Strahl $C\alpha$ senkrecht auf die Collineationsaxe, so lauten diese Resultate in Worten ausgedrückt: Die eine Gegenaxe ist ebensoweit von der Collineationsaxe entfernt, als die Collineationsaxe von der andern Gegenaxe.

Die Gleichungen $\frac{Cr}{r\alpha} = -\varDelta$ und $\frac{q'\alpha}{Cq'} = -\varDelta$ zeigen überdies, daß beide Gegenaxen zwischen Collineationscentrum und Collineationsaxe liegen, wenn $\varDelta$ negativ, daß dagegen die eine unterhalb der Collineationsaxe, die andere oberhalb des Collineationscentrums liegt, wenn $\varDelta$ positiv ist.

Um die Gegenaxen zu construiren, ziehe man durch c′ in Fig. 94 eine Parallele mit dem Strahl $C\alpha$, welche die Collineationsaxe in dem Punkte p trifft und verbinde diesen Punkt mit c durch eine Grade; dann ist der Schnittpunkt der letzteren mit dem Strahl $C\alpha$ der Gegenpunkt r und eine Parallele durch denselben mit der Collinrationsaxe die Gegenaxe R. In ähnlicher Weise wird die Gegenaxe Q′ construirt.

Zusatz 2. Unter den verschiedenen Werthen, welche die Characteristik annehmen kann, ist besonders bemerkenswerth der Werth — 1. Alsdann wird

$$(C\alpha a a') = -1$$

d. h. die Strecke $C\alpha$ wird durch je 2 entsprechende Punkte harmonisch getheilt. Daraus folgt nach Zusatz 4 zu Lehrsatz 1 des §. 14, daß alle Paare entsprechender Punkte auf einem vom Collineationscentrum ausgehenden Strahl eine hyperbolische Punktreihe bilden, deren Doppelpunkte das Collineationscentrum und der Schnittpunkt des Strahls mit der Collineationsaxe sind. Uebrigens ergibt sich auch unmittelbar aus

$$(C\alpha a a') = -1$$

daß das reciproke Doppelverhältniß $(C\alpha a' a)$ ebenfalls den Werth — 1 hat, daß also $(C\alpha a a') = (C\alpha a' a)$

eine Gleichung, welche als das characteristische Merkmal involutorischer Punktsysteme die **Vertauschbarkeit** entsprechender Punkte anzeigt. Die Gegenpunkte auf jedem Strahl und daher auch die Gegenaxen fallen in diesem Falle zusammen und zwar in gleiche Entfernung von Collineationscentrum und von der Collineationsaxe. Man nennt solche collinearliegende Figuren **involutorische ebene Systeme** (Fig. 95).

Aber auch je nach der Lage von C und α modificirt sich die Bedeutung des Doppelverhältnisses (Cαaa') oder der Characteristik. Man kann hier zwei specielle Fälle unterscheiden:

1) Das Collineationscentrum liegt im Unendlichen; alle Strahlen durch dasselbe sind also parallel und bilden gleiche Winkel mit der Collineationsaxe.

Die Relation

$$(C\alpha aa') = \Delta$$

geht jetzt über in

$$(\infty\alpha aa') = \Delta$$

d. h. $\dfrac{\infty a}{a\alpha} : \dfrac{\infty a'}{a'\alpha}$ oder $\dfrac{a'\alpha}{a\alpha} = \Delta.$

d. h. **das Verhältniß der Abstände entsprechender Punkte von der Collineationsaxe ist constant.**

Für die Gegenaxen erhält man

$$\Delta = (\infty\alpha \infty q') = (\infty\alpha r \infty)$$

d. h. beide Gegenaxen fallen zusammen mit der Graden im Unendlichen.

Diese Art der Collineation heißt **Affinität** (Fig. 96); ist auch noch $\Delta = -1$, so ist $\dfrac{a'\alpha}{a\alpha} = -1$ und man hat ein **affines involutorisches System** (Fig. 97).

2) Die Collineationsaxe liegt im Unendlichen. Man hat dann

$$(C\infty aa') = \Delta$$

d. h. $\dfrac{Ca}{a\infty} : \dfrac{Ca'}{a'\infty}$ oder $\dfrac{Ca}{Ca'} = \Delta$

d. h. **das Verhältniß der Abstände entsprechender Punkte vom Collineationscentrum ist constant.**

Auch hier fallen die beiden Gegenaxen mit der Graden im Unendlichen zusammen.

Diese Art der Collineation heißt **Aehnlichkeit** (Fig. 98); das Collineationscentrum führt den Namen **Aehnlichkeitspunkt**, und zwar **äußerer**, wenn Δ positiv, **innerer**, wenn Δ negativ ist. Dreht man die eine der beiden ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren in derselben Ebene um den Aehnlichkeitspunkt, bis sie einen Winkel von 180° beschrieben hat, so geht der äußere Aehnlichkeitspunkt in den innern über und umgekehrt. vgl. Lehrsatz 6, 2. Ist auch noch $\Delta = -1$, so hat man $\dfrac{Ca}{Ca'} = -1$;

die Figuren bilden dann ein ähnliches involutorisches System und liegen symmetrisch zu beiden Seiten des inneren Aehnlichkeitspunktes (Fig. 99).

3) Die Collineationsaxe und das Collineationscentrum liegen im Unendlichen. Da jetzt

$$(\infty\infty aa') = \varDelta$$

d. h. $\frac{\infty a}{a\infty} : \frac{\infty a'}{a'\infty} = \varDelta$, so kann $\varDelta$ nur den einen Werth $+ 1$ haben, woraus folgt, daß sich die Figuren entweder decken oder, wenn dies nicht der Fall ist, congruent sind und mit ihren entsprechenden Punkten auf parallelen Graden liegen.

Man nennt diese Art der Collineation Congruenz.

Lehrsatz 11. Das Doppelverhältniß von 4 Graden, die sich in einem Punkte der Collineationsaxe schneiden und von denen die erste die Collineationsaxe ist, die zweite nach dem Collineationscentrum geht und die zwei übrigen entsprechende Grade sind, ändert sich weder von Punkt zu Punkt der Collineationsaxe, noch von einem Paar entsprechender Graden zu einem anderen Paare, das sich in demselben Punkte der Collineationsaxe schneidet. Und zwar ist dieses Doppelverhältniß der Characteristik des Systems gleich.

Denn wenn von einem Punkte p der Collineationsaxe (Fig. 100) zwei Paare entsprechender Graden ausgehen, so bestimmen sie auf einem beliebigen Strahl $C\alpha$ zwei Paare entsprechender Punkte a, a' und b, b'; geht von einem anderen Punkte q der Collineationsaxe ein drittes Paar entsprechender Graden aus, so bestimmt es auf demselben Strahl die entsprechenden Punkte c und c'. Nun haben wir im vorigen Lehrsatz gesehen, daß

$$(C\alpha aa') = (C\alpha bb') = (C\alpha cc') = \varDelta,$$

also haben auch die von den beiden Punkten der Collineationsaxe nach den Punkten C, α, a, a'; C, α, b, b'; C, α, c, c' gerichteten Strahlen dasselbe constante Doppelverhältniß.

Zusatz 1. Aus der Gleichung

$$(C\alpha ab) = (C\alpha a'b')$$

folgt, daß alle von einem Punkte der Collineationsaxe ausgehenden Graden der einen Figur und alle von demselben Punkte ausgehenden entsprechenden Graden der collinearliegenden Figur zwei projectivische Strahlenbüschel bilden, deren Doppelstrahlen die Collineationsaxe S und die Verbindungslinie δ des gemeinsamen Scheitels mit dem Collineationscentrum sind. Folglich gibt es in jedem dieser Strahlenbüschel zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen, welche den zwei senkrecht aufeinander stehenden Strahlen des anderen entsprechen. Nennt man dieselben bezüglich s, t und s', t', so hat man wegen $(C\alpha aa') = (C\alpha bb') = \varDelta$

$$(\delta Sss') = (\delta Stt') = \varDelta$$

oder 1) $\frac{\sin \delta s}{\sin sS} : \frac{\sin \delta s'}{\sin s'S} = \Delta$

und 2) $\frac{\sin \delta t}{\sin tS} : \frac{\sin \delta t'}{\sin t'S} = \Delta$

und da $\delta t = 90^0 - s\delta \quad tS = 90^0 + sS$

$\delta t' = 90^0 - s'\delta \quad t'S = 90^0 + s'S$

so geht die letzte Gleichung in folgende über

3) $\frac{\cos \delta s}{\cos sS} : \frac{\cos \delta s'}{\cos s'S} = \Delta$

Vermittelst der Gleichungen 1) und 3) ist es dann möglich, die Lage von s und s' und folglich auch von t und t' zu bestimmen.

Dividirt man 1) durch 3) so kommt:

$$\frac{tg\delta s}{tgsS} : \frac{tg\delta s'}{tgs'S} = 1 \text{ oder}$$

$$\frac{tg\delta s}{tgsS} : \frac{cotg\delta t'}{cotgt'S} = 1$$

d. h. 4) $tg\delta s \,.\, tg\delta t' = tgsS \,.\, tgt'S$

eine Gleichung, welche man unmittelbar aus der ersten Gleichung des Lehrsatzes 18 des §. 17 hätte herleiten können, wenn man bedenkt, daß S und δ Doppelstrahlen sind.

Verschiebt man das eine der beiden concentrischen Strahlenbüschel (Fig. 100) sich selbst parallel von q nach C, so bleibt der Strahl Cq beiden gemeinschaftlich und sie sind deshalb perspectivisch. Die Schnittlinie ihrer entsprechenden Strahlen ist eine Gegenaxe; denn schneidet z. B. ein Strahl β des einen Strahlenbüschels die Gegenaxe R in h, so liegt der dem Punkte h entsprechende Punkt h' auf Ch im Unendlichen und auch zugleich auf dem entsprechenden Strahl β', was nur sein kann, wenn Ch parallel ist mit β'. Errichtet man nun im Halbirungspunkte von Cq eine Senkrechte auf diesen Strahl, welcher die Gegenaxe R in m trifft und beschreibt von m aus durch C und q einen Kreis, welcher R in r und r' trifft, so sind qr und qr' die Schenkel s und t des rechten Winkels des einen Strahlenbüschels und Cr und Cr' sind Gerade, welche den Schenkeln s' und t' des andern parallel sind, also ihre Richtung angeben. Vgl. Lehrsatz und Erklärung 16 des §. 17.

Zusatz 2. Gibt man auch hier der Characteristik den Werth — 1 und nennt man zwei von einem Punkte der Collineationsaxe ausgehende Strahlen α und α', so hat man

$$(\delta S \alpha \alpha') = -1$$

und folglich auch $(\delta S \alpha' \alpha) = -1$

d. h. die beiden Figuren angehörigen entsprechenden Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen δ und S sind, bilden ein involutorisches Strahlsystem, in welchem der Winkel δS durch je 2 entsprechende Strahlen harmonisch getheilt wird. Dann folgt aber aus Lehrsatz 20 des §. 17, daß die nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammenfallen, und

aus Lehrsatz 2 Umkehrung 2 des §. 6, daß die Schenkel des dadurch entstehenden rechten Winkels den Winkel δS und seinen Nebenwinkel halbiren.

Für affine Figuren gelten die Gleichungen 1—4 des Zusatzes 1 unverändert; da aber der Winkel δS für alle Strahlen δ unverändert bleibt und doch immer

$$(\delta S s s') = \Delta.$$

so sind die entsprechenden Schenkel s und s' der rechten Winkel für jeden Strahl δ von derselben Richtung. Es gibt also in jeder von zwei affinen und affin liegenden Figuren immer zwei aufeinander senkrecht stehende Hauptrichtungen, die sich paarweise entsprechen. Man construirt dieselben in folgender Weise: Auf einem beliebigen Strahl δ bestimme man drei Paare entsprechender Punkte a, b, c und a', b', c' durch die Relation $\frac{a'\alpha}{a\alpha} = \Delta$ und verbinde dieselbe mit einem Punkte p der Collineationsaxe durch die Graden α, β, γ und α', β', γ'; dann sind die Strahlenbüschel $S\alpha\beta\gamma$ und $S\alpha'\beta'\gamma'$ entsprechende. Verschiebt man jetzt das zweite Strahlenbüschel parallel mit sich selber so daß sein Scheitel immer auf der Collineationsaxe bleibt, bis zu einem Punkte q derselben, so sind beide Strahlenbüschel perspectivisch, weil sie den Strahl S gemeinsam haben, weshalb ihre entsprechenden Strahlen sich in einer Graden schneiden müssen. Man errichte ferner in der Mitte von pq ein Loth, und beschreibe von dem Durchschnittspunkte desselben mit der letzterwähnten Graden einen Kreis, der durch p und q geht, so bestimmen die Durchschnittspunkte desselben mit dieser Graden, wenn man sie mit p und q verbindet, die gesuchten Hauptrichtungen.

Sind die affinen Figuren zugleich involutorisch, so gibt es nur zwei Hauptrichtungen, welche beiden gemeinsam sind und den Winkel der parallelen Strahlen δ mit der Collineationsaxe, sowie seinen Nebenwinkel halbiren.

Zieht man in ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren von einem Punkte der unendlich entfernten Collineationsaxe Paare entsprechender Graden, so sind alle diese Graden unter sich parallel; es kann also in diesem Falle keine entsprechende rechte Winkel geben. Dasselbe gilt für die Congruenz.

Aufgabe. Wenn die Characteristik, das Projectionscentrum und die Collineatiosaxe gegeben sind, zu einer gegebenen Figur die collinearliegende zu entwerfen.

Man ziehe durch das Collineationscentrum C (Fig. 101) eine Parallele zur Collineationsaxe, trage auf ihr von C aus zwei Strecken Cp und Cq auf, deren Verhältniß $= \Delta$, wobei sich von selbst versteht, daß dieselben in derselben Richtung von C aus aufgetragen werden müssen, wenn Δ positiv, in entgegengesetzter, wenn Δ negativ ist; von p aus nach einem Punkte a der gegebenen Figur ziehe man eine Grade, welche die Collineationsaxe in a schneide; die Verbindungslinie von q und a schneidet dann den von C nach a gezogenen Strahl in dem entsprechenden Punkte a' der collinearlie-

genden Figur. Denn heißt der Durchschnittspunkt von Ca mit der Collineationsaxe α, so hat man, wenn man a als Scheitel eines Strahlenbüschels betrachtet, welches nacheinander durch die Transversalen $C\alpha$ und pq geschnitten wird:

$$(C\alpha aa') = (C\infty pq)$$
$$= \frac{Cp}{p\infty} : \frac{Cq}{q\infty} = \frac{Cp}{Cq} = \Delta$$

Diese Construction kann auch dazu dienen, die Gegenaxen zu finden; denn verbindet man p mit dem unendlich entfernten Punkte des Strahls $C\alpha$ d. h. zieht man von p aus eine Parallele mit $C\alpha$, welche S in a' schneidet, so ist der Durchschnittspunkt von a'q mit $C\alpha$ der Gegenpunkt; eine Parallele durch diesen mit der Collineationsaxe ist die Gegenaxe Q'. In ähnlicher Weise findet man die zweite Gegenaxe R.

Die Construction für die Fälle der Affinität und Aehnlichkeit ist leicht und ergibt sich aus den Gleichungen des Zusatzes 2 zu Lehrsatz 10.

Lehrsatz 12. Einem Strahlenbüschel der einen Figur, das seinen Scheitel in der Gegenaxe derselben hat, entspricht in der collinear liegenden Figur ein System von Parallelen und umgekehrt.

Denn da der Scheitel des entsprechenden Strahlenbüschels im Unendlichen liegt, so sind die von ihm aus nach den Schnittpunkten der Strahlen mit der Collineationsaxe gezogenen Graden parallel und da umgekehrt ein System von Parallelen als ein Strahlenbüschel angesehen werden kann, dessen Scheitel im Unendlichen liegt, so entspricht ihm in der collinearliegenden Figur ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel auf der Gegenaxe, dessen Strahlen nach den Schnittpunkten der Parallelen mit der Collineationsaxe hingehen.

Zusatz. Liegen die Gegenaxen beide im Unendlichen, wie dies bei affin und ähnlichgelegenen Figuren der Fall ist, so entspricht einem System von Parallelen in der einen Figur ein System von Parallelen in der anderen.

Aufgabe. Wenn das Collineationscentrum, die Collineationsaxe und eine Gegenaxe gegeben sind, zu einer gegebenen Figur die collinearliegende zu entwerfen.

Um zu einem Punkte a (Fig. 102) den entsprechenden zu finden, ziehe man von ihm aus eine beliebige Grade, welche die Gegenaxe R in p und die Collineationsaxe in q schneidet und ziehe von q aus eine Parallele zu dem durch p gehenden Strahl Cb; der Schnittpunkt der letzteren mit dem durch a gehenden Strahl ist der gesuchte Punkt a'.

§. 20. Einige Anwendungen der Lehren des vorigen Paragraphen.

In dem Zusatz zu Lehrsatz 2 des vorigen Paragraphen haben wir gelernt, daß sich gewisse Eigenschaften von Figuren bei ihrer perspectivischen Projection auf eine Bildebene nicht ändern, weshalb man dieselben projectivische Eigenschaften genannt hat; so lassen namentlich viele Eigenschaften des Kreises eine Erweiterung auf Kegelschnitte zu. Da' nun collinearliegende Figuren durch Umlegung der Bildebene in die Originalebene entstehen, so müssen auch von ihnen dieselben Schlüsse gelten. Es würde jedoch die Grenzen dieses Büchleins überschreiten, wollten wir hier eine auf die Collineation gegründete Theorie der Kegelschnitte geben; wir verweisen dafür den weiter Strebenden auf Fiedler's darstellende Geometrie und Gretschel's organische Geometrie und begnügen uns mit einigen dem elementaren Gebiete angehörigen Anwendungen.

Aufgabe. Die Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits aus denen des Quadrats zu entwickeln.

Es sei das Collineationscentrum C (Fig. 103) die Collineationsaxe S und die Gegenaxe Q', sowie das Quadrat abcd gegeben. Um die collineare Figur zu letzterem zu erhalten, ziehe man durch das Collineationscentrum eine Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten ab und cd des Quadrats, welche Q' in q' schneidet und verbinde diesen Punkt mit den Schnittpunkten m und n der Seiten ab und cd mit der Collineationsaxe, so sind q'm und q'n die zu ab und cd entsprechenden Graden; dies folgt aus den Eigenschaften entsprechender Graden und der Gegenaxen. Sind ferner m' und n' die Schnittpunkte der Quadratseiten ad und bc mit der Collineationsaxe und q'' der Schnittpunkt einer Parallelen zu denselben durch das Collineationscentrum mit der Gegenaxe, so sind q''m' und q''n' die Graden, welche den Seiten ad und bc entsprechen. Diese vier Graden q'm, q'n, q''m' und q''n' bilden ein vollständiges Vierseit. Zieht man jetzt in dem Quadrat die Diagonalen ac und bd und in derselben Weise wie vorher die ihnen entsprechenden q'''m'' und q''''n'', so bilden die letzteren zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits, während die dritte durch die Gegenaxe Q' gebildet wird, auf welcher die 4 Punkte q', q'', q''', q'''' liegen. Die Schnittpunkte von q'm und q''m', q'm und q''n', q'n und q''n', q'n und q''m', q'''m'' und q''''n'' nenne man nach der Reihe a', b', c', d', o'; sie entsprechen in derselben Folge den Punkten a, b, c, d, o des Quadrats, von

denen der letztere der Durchschnittspunkt der Diagonale ac und bd ist. Darnach sind also die Punkte o′, q′, q″ die Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits.

Nun wird die Diagonale ac des Quadrats durch den Punkt o und den Punkt im Unendlichen harmonisch getheilt, weil sie von o halbirt wird, d. h es ist $(aco\infty) = -1$ und folglich auch nach Lehrsatz 8 des vorigen Paragraphen $(a'c'o'q'''') = -1$; ebenso ist $(b'd'o'q''') = -1$; nimmt man c′ als Scheitel eines Strahlenbüschels an, dessen Strahlen nach den Punkten b′, d′, o′, q‴ hingehen, so folgt aus der letzteren Gleichung auch noch $(q''q'q''''q''') = -1$ d. h. in Worten: Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird von den zwei auf ihr liegenden Diagonalpunkten harmonisch getheilt.

Zieht man in dem Quadrat durch o die Grade fh parallel mit ab und cd und die Grade eg parallel mit bc und da, so entsprechen ihnen in dem vollständigen Vierseit die Graden q′o′ und q″o′; die Schnittpunkte von q′o′ mit b′c′ und d′a′ sollen h′ und f′ heißen und entsprechen den Punkten h und f des Quadrats; die Schnittpunkte von q″o′ mit a′b′ und c′d′ heißen g′ und e′ und entsprechen den Punkten g und e. Man hat also jetzt ein vollstständiges Viereck a′b′c′d′ mit den Diagonalpunkten o′, q′, q″ und den Diagonalen o′q′, q′q″, q″o′.

Nun wird der Winkel boc durch oh und oe harmonisch getheilt, weil er und sein Nebenwinkel durch diese Graden halbirt werden, d. h. es ist $o(bch\infty) = -1$ und daher nach Lehrsatz 9 des vorigen Paragraphen auch $o'(b'c'h'q'') = -1$; daraus folgt noch $q'(b'c'h'q'') = -1$ und weil $o'(b'c'h'q'') = o'(b'a'q'g')$ auch noch $q''(b'a'q'g') = -1$ d. h. in Worten: Der Winkel zwischen zwei durch einen Diagonalpunkt gehenden Seiten eines vollständigen Vierecks wird durch die zwei durch denselben Punkt gehenden Diagonalen harmonisch getheilt.

Lehrsatz. **Zwei Kreise in einer Ebene können auf vierfache Weise als collinearliegende Figuren angesehen werden; dabei ist der innere oder äußere Aehnlichkeitspunkt Collineationscentrum und die Collineationsaxe fällt entweder mit der Potenzlinie oder der Graden im Unendlichen zusammen.**

Zieht man ein Büschel von Aehnlichkeitsstrahlen, so können die vier auf einem derselben liegenden Durchschnittspunkte mit den Kreisen auf doppelte Weise in Paare zusammengestellt werden, indem man entweder diejenigen als zusammengehörig annimmt, welche die Endpunkte nicht paralleler Halbmesser sind oder diejenigen, welche die Endpunkte paralleler Halbmesser sind; die ersteren haben wir Erklärung 2 des §. 15 potenzhaltende Punkte genannt.

1. Sind nun α und a', β und b', γ und c', δ und d', ε und e' rc. (Fig. 104) Paare potenzhaltender Punkte und man verbindet α mit β, γ, δ, ε rc. und a' mit b', c', d', e' rc. durch Grade, so bilden diese 2 perspectivische Strahlenbüschel, weil jedem Strahle des einen nur ein Strahl des anderen entspricht (vgl. Lehrsatz 14 des §. 17) und die Strahlen αa' und a'α zusammenfallen; die Schnittpunkte entsprechender Graden liegen also in einer Graden, welche die Collineationsaxe ist. Nun sei A der äußere Aehnlichkeitspunkt und B der Schnittpunkt der Strahlen $\alpha\beta$ und a'b', so hat man nach Lehrsatz 3 des §. 15:

$$A\alpha \cdot Aa' = A\beta \cdot Ab'$$

woraus folgt, daß die 4 Punkte α, β, a', b' auf einem Kreise liegen; deshalb hat man aber auch

$$B\alpha \cdot B\beta = Ba' \cdot Bb'$$

d. h. die Potenz des Punktes B in Bezug auf die gegebenen Kreise ist gleich. Alle Punkte der Collineationsaxe sind also Punkte gleicher Potenz in Bezug auf die gegebenen Kreise. Die Characteristik des Systems läßt sich finden, wenn man bedenkt, daß die Berührungspunkte m und m' der gemeinschaftlichen Tangente entsprechende Punkte sind und daß der Mittelpunkt n derselben ein Punkt der Potenzlinie ist; man hat dann nämlich

$$\Delta = \frac{Am}{mn} : \frac{Am'}{m'n} = -\frac{Am}{Am'} = -\frac{r}{r'}$$

Für den inneren Aehnlichkeitspunkt I verhält sich Alles ebenso, nur ist die Characteristik $= + \frac{r}{r'}$.

Die von einem Punkte der Potenzlinie an die Kreise gezogenen Tangentenpaare sind entsprechende Grade, ihre Berührungspunkte entsprechende Punkte, ihre Berührungssehnen entsprechende Grade; bewegt sich der Punkt auf der Potenzlinie fort, so drehen sich die Berührungssehnen um entsprechende Punkte, oder mit andern Worten: die Pole der Potenzlinie in Bezug auf beide Kreise sind entsprechende Punkte. Dies gilt für beide Aehnlichkeitspunkte als Collineationscentra; man hat daher wenn p und p' diese Pole und S den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Potenzlinie bedeuten:

$$\frac{Ap}{pS} : \frac{Ap'}{p'S'} = -\frac{r}{r'}$$

$$\text{und } \frac{Ip}{pS} : \frac{Ip_{\prime}}{p'S} = +\frac{r}{r'}$$

woraus folgt:

$$\frac{Ap}{pI} : \frac{Ap'}{p'I} = -1$$

d. h. die Entfernung der beiden Aehnlichkeitspunkte wird durch die Pole der Potenzlinie in Bezug auf beide Kreise harmonisch getheilt.

Da dieselbe Entfernung durch die Mittelpunkte der Kreise harmonisch getheilt wird (Zusatz 2 zu Lehrsatz 1 des §. 15), so ergibt sich daraus auch noch, daß die Aehnlichkeitspunkte Doppelpunkte einer Involution sind, welche durch die Mittelpunkte und durch die Pole der Potenzlinie bestimmt wird. (Vgl. Lehrsatz 2 unt Zusatz 4 zu Lehrsatz 1 des §. 14).

2. Sind dagegen a und a', b und b', c und c', d und d', e und e' Paare ähnlichliegender Punkte und man verbindet a mit b, c, d, e ꝛc. und a' mit b', c', d', e' ꝛc. durch Grade, so bilden diese zwei identische perspectivische Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen parallel sind, sich also auf der Linie im Unendlichen schneiden; letztere ist daher die Collineationsaxe und das ganze System liegt collinear ähnlich, seine Characteristik ist für den äußeren Aehnlichkeitspunkt $= + \frac{r}{r'}$, für den inneren $= - \frac{r}{r'}$, die Mittelpunkte der Kreise sind entsprechende Punkte, wie man entweder unmittelbar durch die Aehnlichkeit von Dreiecken oder in ähnlicher Weise wie in voriger Nummer durch die Bemerkung findet, daß die Mittelpunkte die Pole der unendlich entfernten Collineationsaxe in Bezug auf beide Kreise sind.

Der Kreis der neun Punkte beim Dreieck. Die ebengefundenen Eigenschaften zweier Kreise geben ein Mittel an die Hand, die Beziehungen verschiedener merkwürdiger Punkte des Dreiecks aufzuhellen; wir folgen in der Darstellung derselben beinahe wörtlich der Entwicklung von Jakob Steiner, geometrische Constructionen pag. 49 ff.

I. Zieht man in einem beliebigen Dreieck abc (Fig. 105) aus den Ecken nach den Mitten a_1, b_1, c_1 der gegenüberliegenden Seiten grade Linien aa_1, bb_1, cc_1, so schneiden sich dieselben bekanntlich in einem und demselben Punkte I und theilen einander dergestalt, daß sich die Abschnitte einer jeden zu einander verhalten wie 2 : 1; d. h. es verhält sich:

$$1 . Ia : Ia_1 = Ib : Ib_1 = Ic : Ic_1 = -(2 : 1).$$

Daraus folgt also, daß man den Punkt I als Collineationscentrum oder inneren Aehnlichkeitspunkt eines ähnlich liegenden Systems ansehen kann, in welchem a und a_1, b und b_1, c und c_1 entsprechende Punkte sind oder daß die Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ ähnliche und ähnlichliegende Figuren sind und daß je 2 ähnlichliegende Punkte in Bezug auf diese Dreiecke auch ähnlichliegende Punkte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt I sind d. h. mit diesem in einer Graden liegen und von ihm nach dem beständigen Verhältniß — (2 : 1), der Characteristik des Systems, entfernt sind.

Wird nun ferner als bekannt vorausgesetzt, daß die 3 Lothe a_1M, b_1M, c_1M, welche aus den Mitten a_1, b_1, c_1 der Seiten des ersten Dreiecks abc auf diesen Seiten errichtet werden, einander in einem Punkte M treffen, nämlich im Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises, und wird bemerkt, daß dieselben zugleich auch auf den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks $a_1b_1c_1$ senkrecht sind, weil diese bezüglich mit jenen parallel sind:

so folgt, wenn man jene Lothe für einen Augenblick als zu dem Dreieck $a_1b_1c_1$ gehörend ansieht, vermöge des Aehnlichkeitspunktes I unmittelbar, daß auch die ihnen entsprechenden drei Graden d. h. die durch die Ecken a, b, c des ersten Dreiecks mit jenen Lothen parallelen und mithin zu den Gegenseiten dieses Dreiecks senkrechten Graden aA, bA, cA einander in einem bestimmten Punkte A treffen, und zwar in demjenigen Punkte, welcher jenem Punkte M entspricht, so daß folglich die drei Punkte M, I, A in einer Graden liegen und sich verhält

$$2 . IA : IM = -(2 : 1).$$

Zugleich folgt zunächst aus dieser Betrachtung auf doppelte Weise der bekannte Satz: Daß die aus den Ecken auf die Gegenseiten eines Dreiecks (a, b, c, oder abc) gefällten Lothe (a_1M, b_1M, c_1M oder aA, bA, cA) allemal einander in demselben Punkte (M oder A) treffen.

Es folgt weiter, wenn man nämlich den Punkt M als der ersten Figur angehörend ansieht und zwar als Mittelpunkt des dem Dreieck abc umschriebenen Kreises, daß ihm dann der Mittelpunkt M_1 des dem Dreieck $a_1b_1c_1$ umschriebenen Kreises entspricht, und daß folglich dieser letztere Punkt M_1 ebenfalls in dem vorgenannten Projectionsstrahl MIA liegen muß, und zwar so liegen muß, daß sich verhält:

$$3 . IM : IM_1 = -(2 : 1)$$

Aus diesem und dem vorigen Verhältniß folgt

$$\frac{IA}{IM_1} = +4 \text{ und daraus}$$

$$\frac{AM_1}{IM_1} = -3,$$

während (2) ergibt:

$$\frac{AM}{IM} = +3.$$

Diese beiden letzten Verhältnisse geben zusammen mit (3)

$$4 . AM : AM_1 = 2 : 1$$

und da die Radien der beiden Kreise M und M_1 sich ebenfalls wie 2 : 1 verhalten, so ist der Punkt A der äußere Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise M und M_1.

Demnach hat man, zusammengenommen, den folgenden Satz:

Bei jedem beliebigen Dreieck abc liegen die zwei Punkte A und I, wovon der eine A der Durchschnittspunkt der drei Höhen und der andere I der Durchschnittspunkt der drei aus den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Graden ist, mit den Mittelpunkten M und M_1 der zwei Kreise, wovon der eine dem Dreieck umschrieben und der andere durch die Mitten der Seiten desselben geht, allemal in einer und derselben Graden, und zwar sind die erstgenannten

zwei Punkte die Aehnlichkeitspunkte der zwei Kreise, so daß also die vier genannten Punkte harmonisch liegen, wobei sowohl das erste wie das zweite Punktenpaar zugeordnete harmonische Punkte sind; und ferner sind die Abstände der vier Punkte von einander namentlich so beschaffen, daß sich verhält

$$IM_1 : MI : M_1A : MA = 1 : 2 : 3 : 6.$$

II. Vermöge der Kreise M und M_1 und ihrer Aehnlichkeitspunkte A, I folgert man unmittelbar noch mehr Eigenschaften, als z. B. nachstehende:

1. Die Punkte a_1, b_1, c_1, in welchen der Kreis M_1 die Strahlen Aa, Ab, Ac schneidet, sind vermöge des äußeren Aehnlichkeitspunktes A die Mitten dieser Strahlen, so daß sich verhält

$$Aa : Aa_1 = Ab : Ab_1 = Ac : Ac_1 = 2 : 1$$

2. Da der Punkt M_1 in der Mitte zwischen M und A liegt und da Ma_1 und $A\alpha_1$ zu $a_1\alpha_1$ senkrecht sind, so muß folglich der Kreis M_1 auch durch α_1 gehen, weil er durch a_1 geht; ebenso muß er durch β_1 und γ_1 gehen.

Das Vorstehende gibt folgendem Satz:

In jedem Dreieck abc liegen die 9 Punkte — nämlich die drei Mittelpunkte a_1, b_1, c_1 der Seiten, die drei Fußpunkte α_1, β_1, γ_1 der Höhen, die drei Mittelpunkte a_1, b_1, c_1 derjenigen Strecken der Höhen, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkte A und den Ecken des Dreiecks liegen — allemal zusammen in einem und demselben Kreise M_1.

Anmerkung. Daß der Kreis der neun Punkte auch den inneren und die drei äußeren Berührungskreise des Dreiecks abc berührt, wurde schon früher bemerkt (Anmerk. zu Lehrsatz 11 des §. 4), kann aber hier nicht bewiesen werden, vgl. Salmon analyt. Geometrie der Kegelschnitte pag. 194 ff.

§. 21. Das Princip der Reciprocität (Dualität).

Bestimmt man zu jedem Punkte einer Figur die Polare in Bezug auf einen in derselben Ebene liegenden Kreis, so entsteht durch alle auf solche Weise gefundenen Polaren eine neue Figur, welche man die Polarfigur der ersten nennt. Die Verbindungslinie je zweier Punkte der ersten Figur hat zum Pol den Schnittpunkt der Polaren dieser Punkte und steht im nämlichen Verhältniß zu diesem Pol, wie ein Punkt der ersten Figur zu seiner Polare in der zweiten. Jedem Punkte der ersten Figur entspricht also eine Grade in der zweiten, jeder Graden der ersten ein Punkt der zweiten, der Verbindungslinie zweier Punkte in der ersten der Schnittpunkt

der entsprechenden Graden in der zweiten, dem Schnittpunkt zweier Graden die Verbindungslinie zweier Punkte, einer Punktreihe ein Strahlenbüschel, einem Strahlenbüschel eine Punktreihe. Alle diese Beziehungen sind gegenseitig (reciprok) und jede Figur kann als die Polarfigur der andern angesehen werden.

Lehrsatz. Das Doppelverhältniß einer Punktreihe ist dem Doppelverhältniß des durch Polarisation daraus entstandenen Strahlenbüschels gleich und umgekehrt.

Nimmt man auf einer Graden (Fig. 106) eine Reihe von Punkten a, b, c, d rc. an und verbindet sie durch Graden mit dem Mittelpunkt o des gegebenen Kreises, so steht jede derselben senkrecht auf der Polare des Punktes, den sie mit dem Mittelpunkt verbindet; daher ist das durch alle diese Polaren gebildete Strahlenbüschel gleich und ähnlich mit dem ersten, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist, hat also auch dasselbe Doppelverhältniß wie dieses Strahlenbüschel und folglich auch wie die mit ihm projectivische Punktreihe. In ähnlicher Weise läßt sich der umgekehrte Satz beweisen.

Schlußbemerkung. Wendet man diese Principien auf die Figuren mehrerer bekannten Lehrsätze an, so resultiren daraus unmittelbar andere uns ebenfalls schon bekannte Sätze.

So geht ein vollständiges Vierseit in ein vollständiges Viereck, seine sechs Eckpunkte in die sechs Seiten des Vierecks, seine drei Diagonalen in die drei Diagonalpunkte des Vierecks, seine drei Diagonalpunkte in die drei Diagonalen des Vierecks über. Jede Diagonale des Vierseits wird bekanntlich durch die 2 auf ihr liegenden Diagonalpunkte harmonisch getheilt; der vorstehende Lehrsatz ergibt, daß der Winkel zwischen zwei durch einen Diagonalpunkt gehenden Seiten des Vierecks von den zwei durch denselben Punkt gehenden Diagonalen harmonisch getheilt wird. Eine Transversale schneidet das vollständige Viereck in einem Punktsystem; daraus folgt durch Polarisation, daß die von einem Punkte nach den Eckpunkten des Vierseits gezogenen Graden ein Strahlsystem bilden.

Polarisirt man eine krummlinige Figur z. B. einen Kreis, so entspricht jedem Punkte ihrer Peripherie eine bestimmte Grade und alle auf diese Weise erhaltenen Graden umhüllen eine neue Figur, welche im Allgemeinen wieder krummlinig sein wird und sind deren Tangenten. Umgekehrt verbindet man zwei unendlich nahe gelegene Punkte der Peripherie der ersten Figur durch eine Grade d. h. zieht man eine Tangente an dieselbe, so entspricht ihr der Schnittpunkt der entsprechenden unendlich wenig in ihrer Lage verschiedenen Tangenten, also ein Punkt der Peripherie der Polarfigur. Jeder Tangente der einen Figur entspricht also ein Punkt der Peripherie der andern und

umgekehrt, dem Schnittpunkt zweier Tangenten die Verbindungslinie ihrer entsprechenden Punkte, ihren Berührungspunkten die Tangenten in ihren entsprechenden Punkten.

Die Polarfigur des Kreises ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt und kann uns hier nicht weiter beschäftigen. Nur in einem Falle ist sie wiederum ein Kreis, wenn nämlich der zu polarisirende Kreis concentrisch ist mit dem polarisirenden; in der That entsprechen dann allen Punkten der Peripherie des ersten Grade, welche gleichweit vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte entfernt sind und also einen Kreis als Polarfigur umhüllen.

Verzeichnet man in dem zu polarisirenden Kreis ein Sechseck, so entspricht ihm im Polarkreis ein Sechsseit, dessen Seiten denselben berühren; den Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten des Sechseckes entsprechen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken des Sechsseits und da die ersteren auf einer Graden liegen, so schneiden sich die letzteren in einem Punkte. So ergibt sich der Brianchon'sche Lehrsatz als eine nothwendige Folgerung aus dem Pascal'schen.

In ähnlicher Weise kann man zu jedem Lehrsatze, in welchem Lagenverhältnisse von Graden und Punkten in Betracht kommen, einen ihm entsprechenden finden, wenn man nur die Regel festhält, daß man überall statt Punkt Grade und umgekehrt, statt Verbindungslinie zweier Punkte Schnittpunkt zweier Graden und umgekehrt, statt Berührungspunkt Tangente und umgekehrt setzen müssen. Diese Regel, welche wir im Vorhergehenden begründet haben, heißt das *Princip der Reciprocität*, insofern es aus dem Entsprechen von Pol und Polare hergeleitet wird. Sein Grund liegt übrigens tiefer, weil es als eine nothwendige Folge daraus hervorgeht, daß wir uns jede Figur auf doppelte Weise, entweder durch Aneinanderreihung von Punkten, welche sie begrenzen oder von Graden, welche sie einhüllen, entstanden denken können. So hat jeder Satz eine doppelte Seite, je nachdem in ihm die Bedeutung des Punktes oder der graden Linie als erster Elementargebilde dominirend hervortritt; die Rolle, welche auf der einen Seite Punkte und Punktreihen spielen, ist auf der andern Seite Graden und Strahlenbüscheln zugetheilt und umgekehrt. In diesem allgemeineren Sinne nennt man deswegen dieses Princip auch das *Princip der Dualität*; wir haben dasselbe in den vorhergehenden Paragraphen überall, ohne daß wir darauf aufmerksam gemacht wurden, hervortreten sehen; denn jedesmal stand einem gefundenen Satz ein zweiter analoger als Zwillingsbruder zur Seite, dem wir freilich stets einen besonderen Beweis folgen ließen. Aber finden können hätten wir diese Zwillingsbrüder durch alleinige Anwendung des eben dargelegten Princips und insofern ist es eine unerschöpfliche Quelle neuer Wahrheiten und seiner Anwendung sind viele große Entdeckungen im Gebiete der Geometrie zu danken.

Inhaltsverzeichniß.

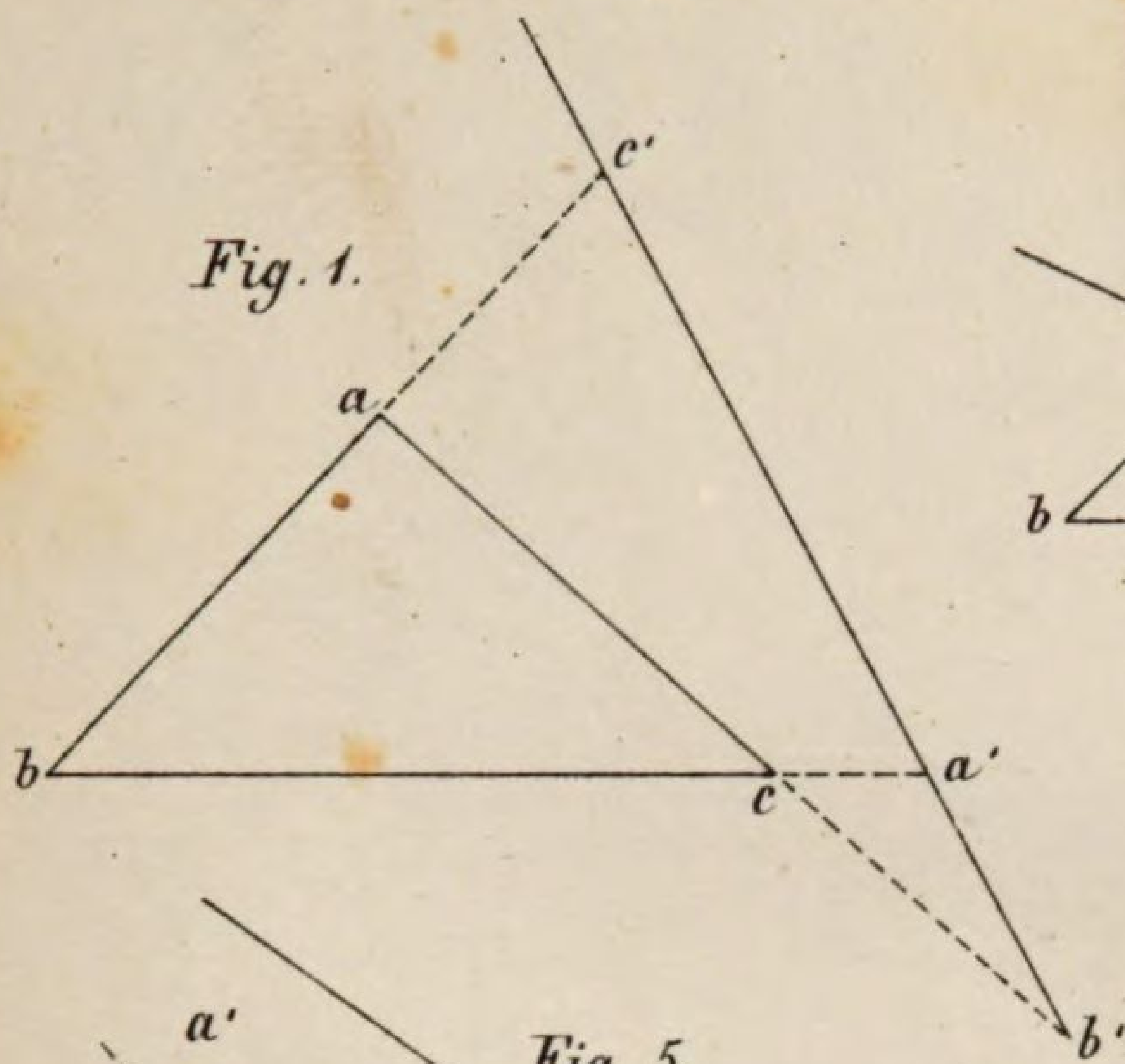


Fig. 1.

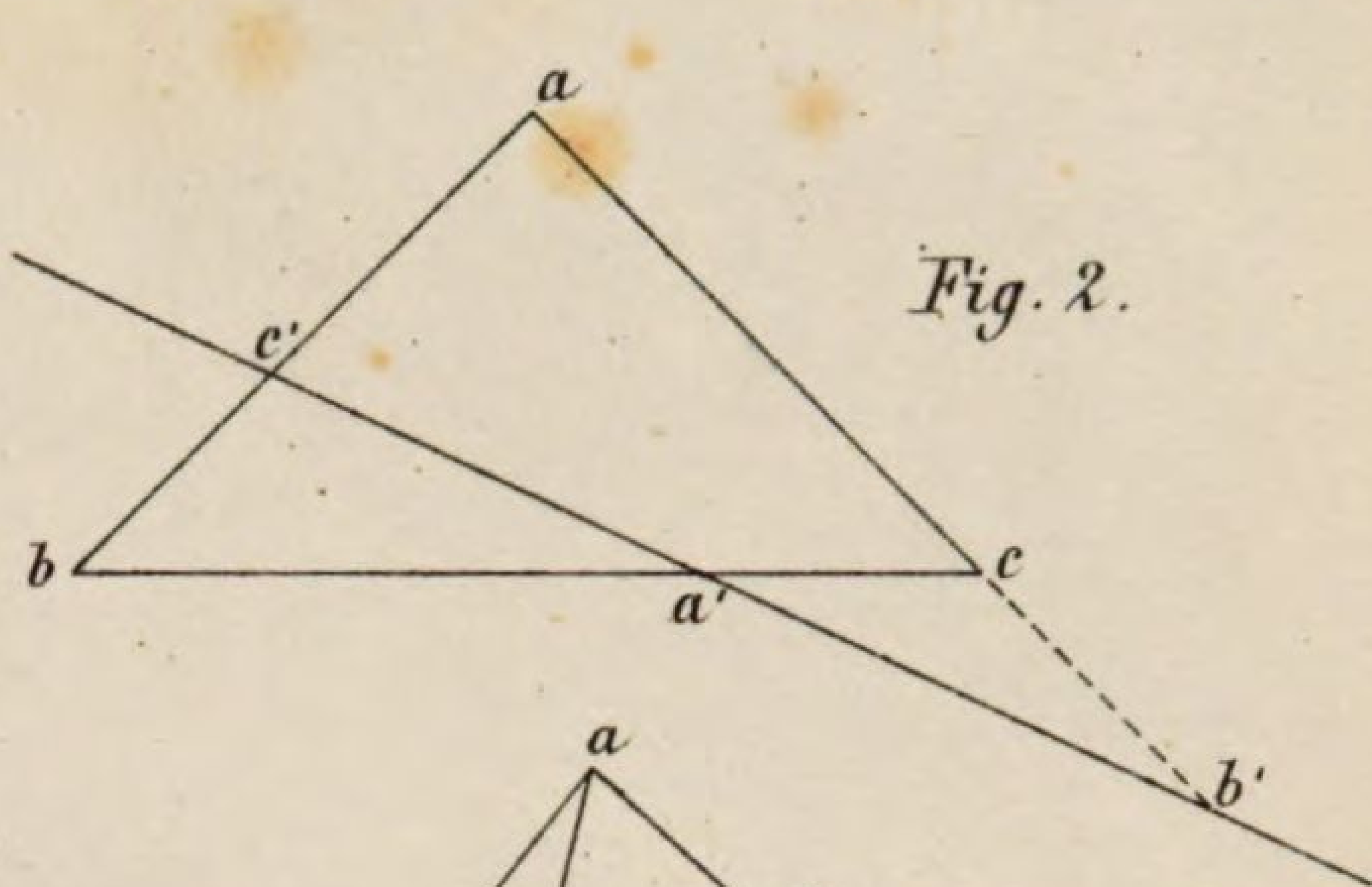


Fig. 2.

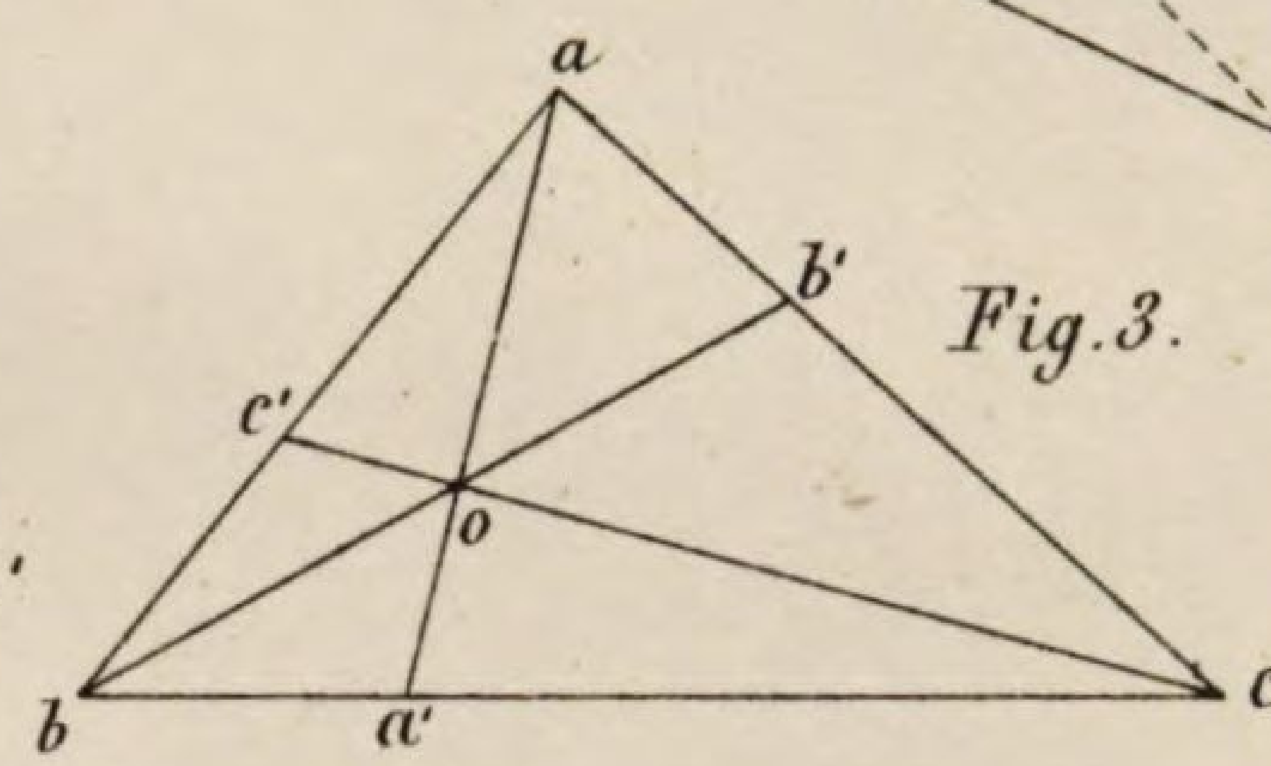


Fig. 3.

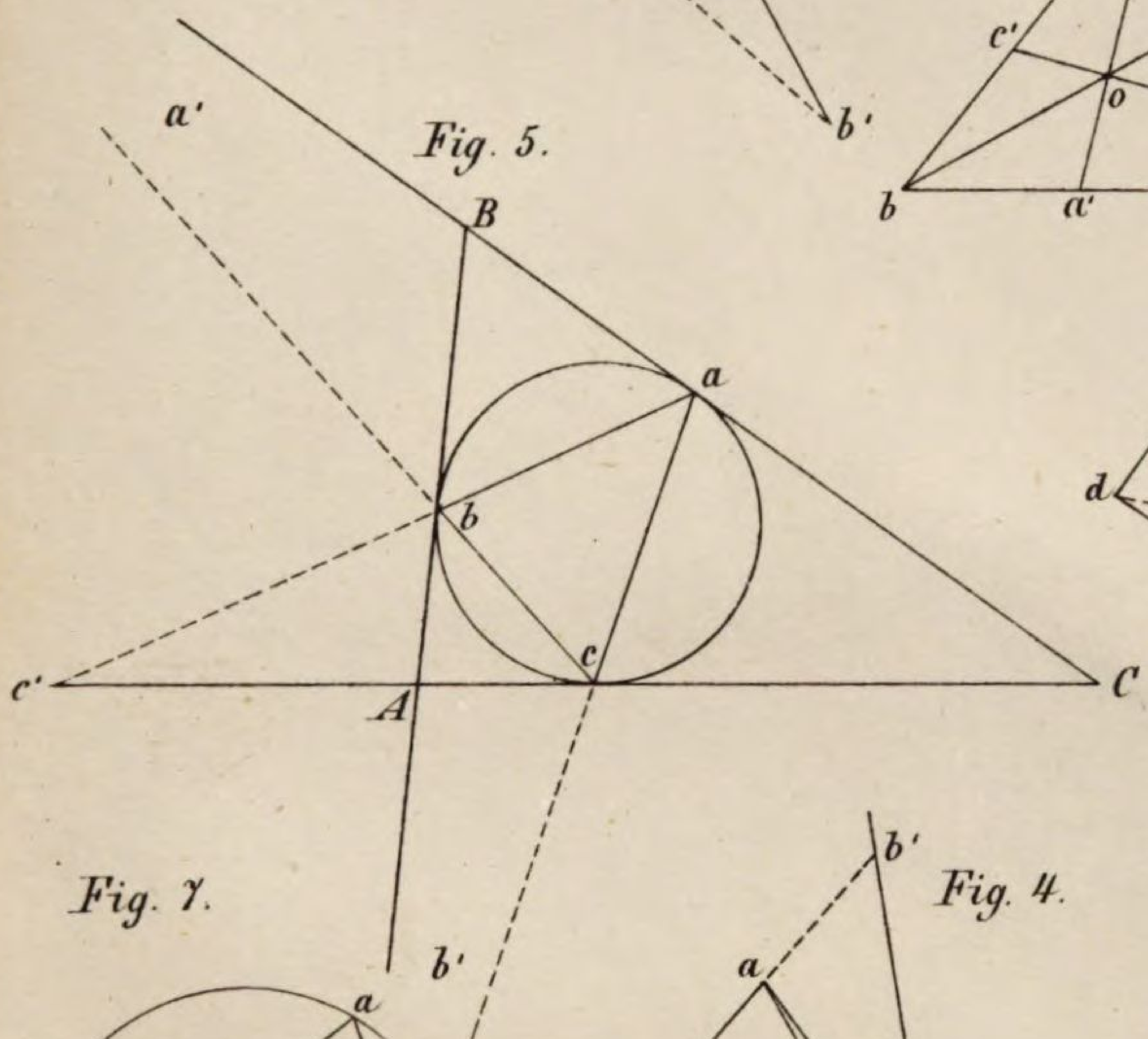


Fig. 5.

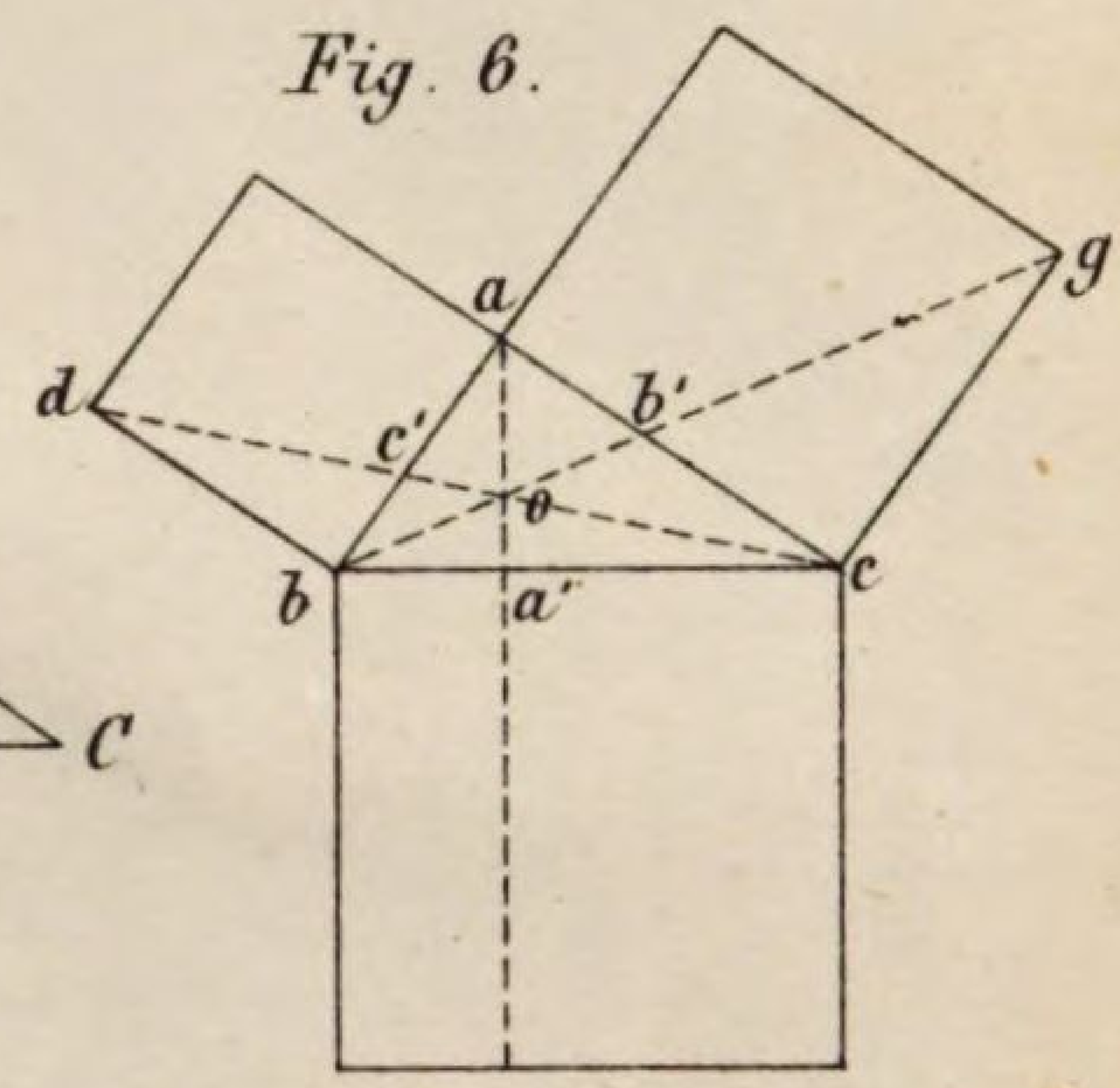


Fig. 6.

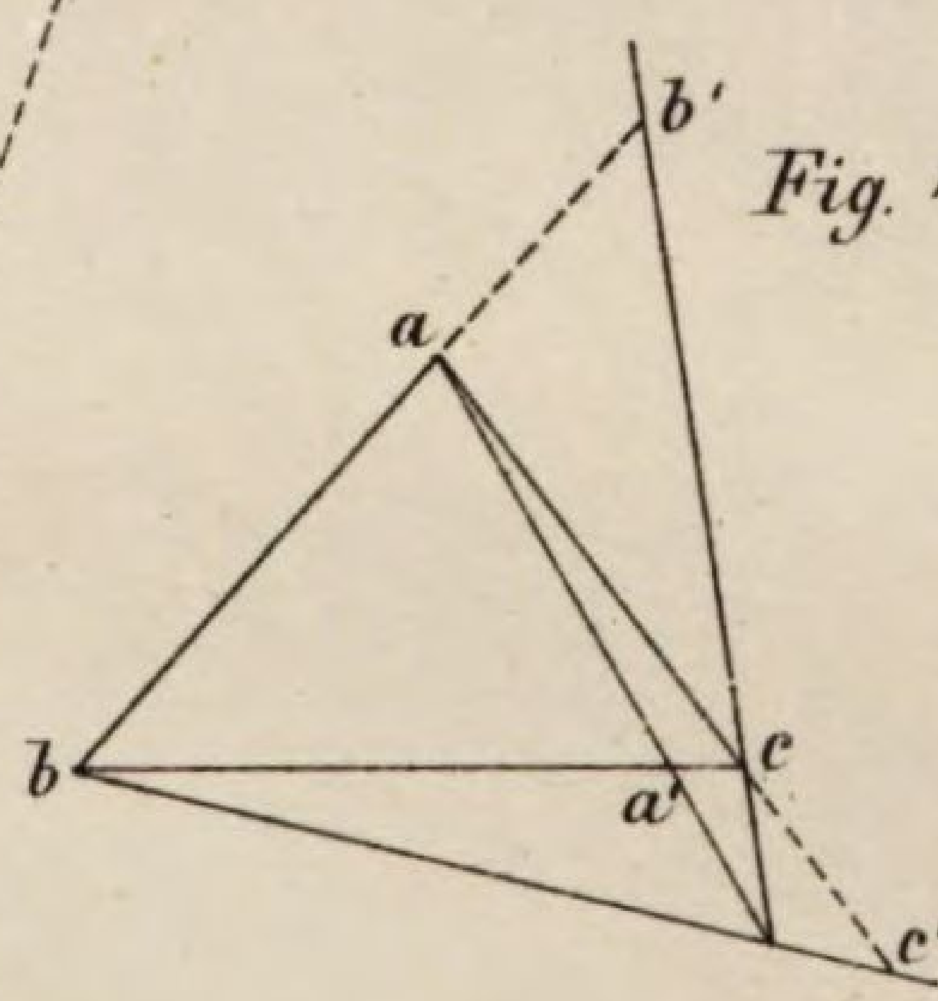


Fig. 4.

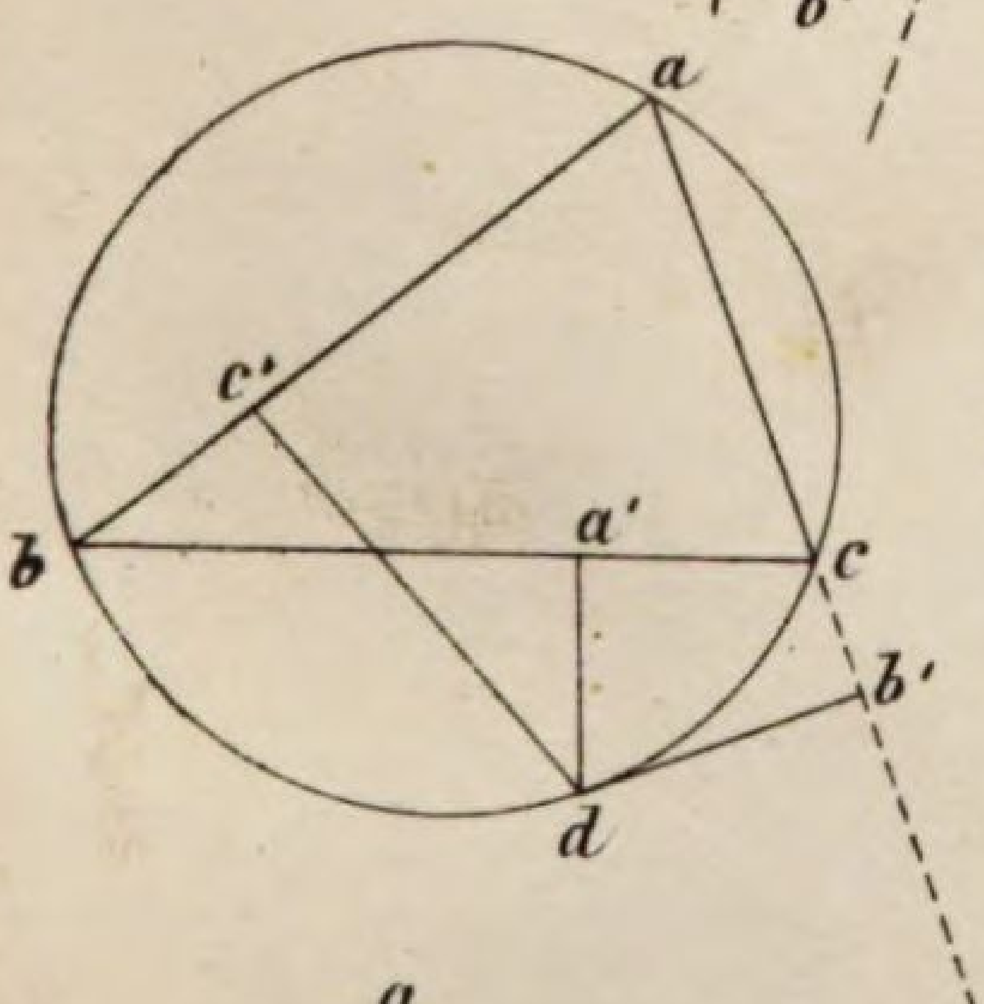


Fig. 7.

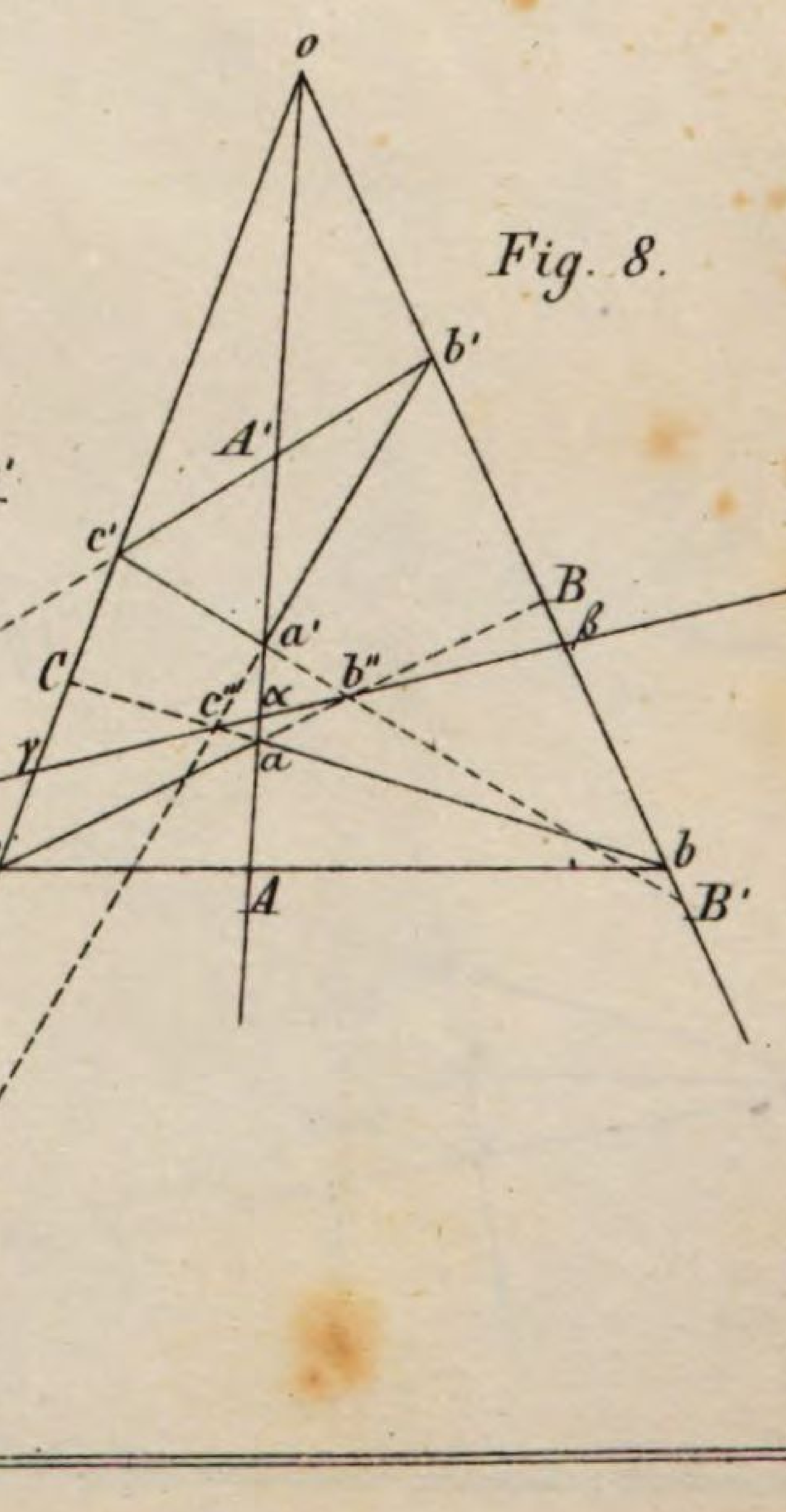


Fig. 8.

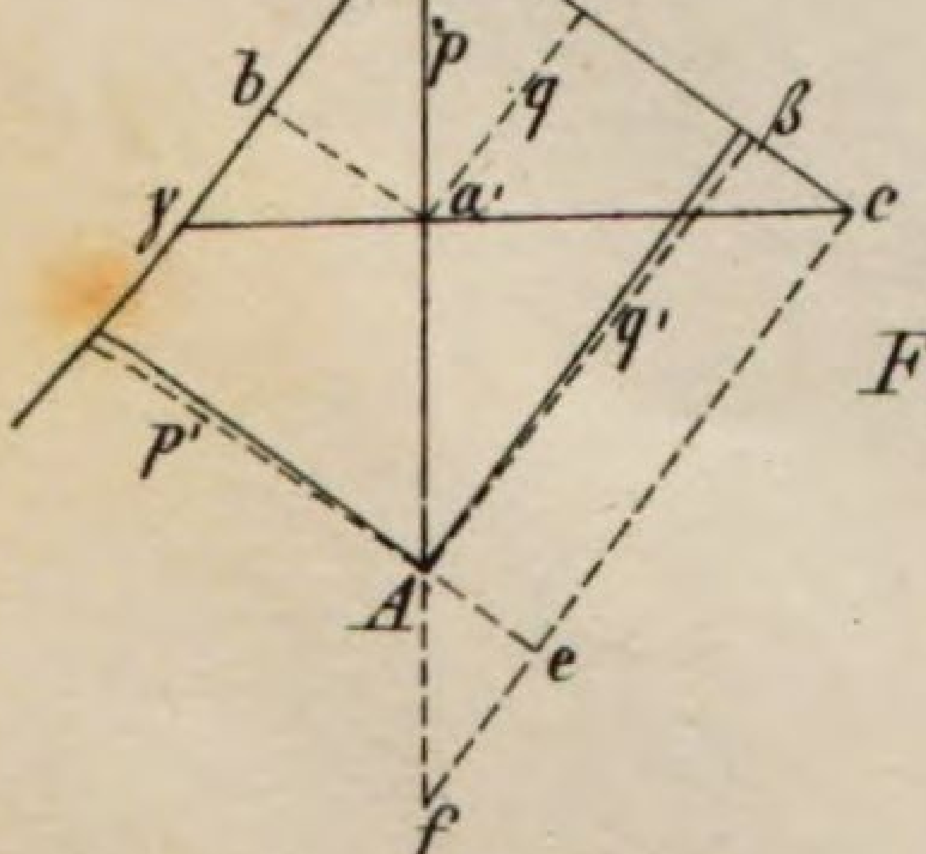





Fig. 9.


Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17 u. 23.
Fig. 18.
Fig. 19.


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 24.
Fig. 29.
Fig. 28.
Fig. 26.
Fig. 25.
Fig. 27.


Fig. 32.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 34.
Fig. 33.
Fig. 35.
Fig. 36.

Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.

Fig. 48.

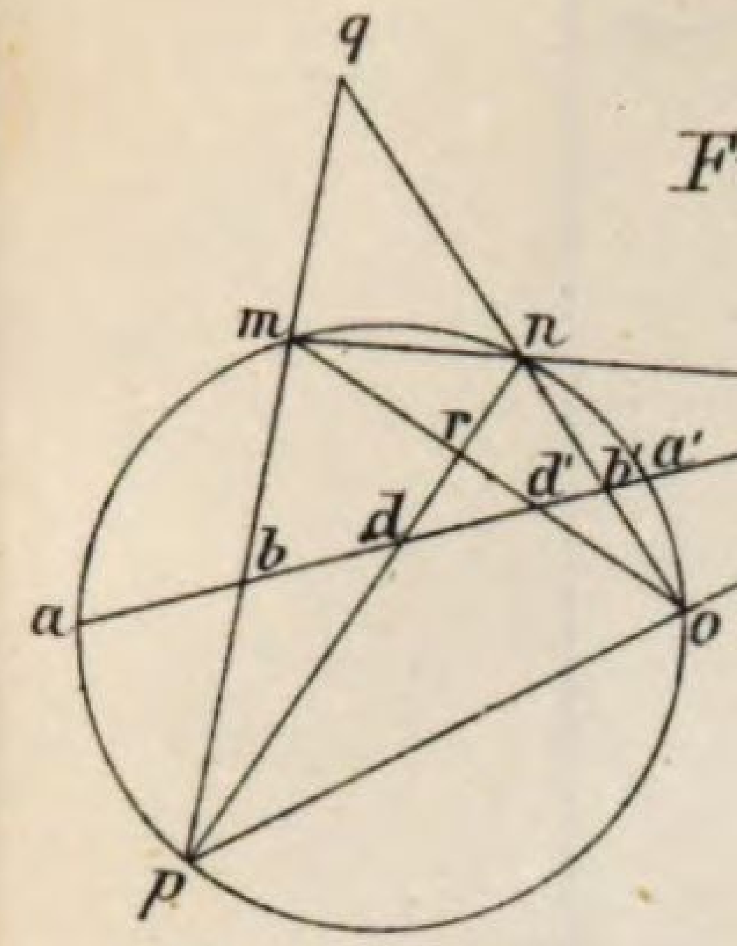


Fig. 46.

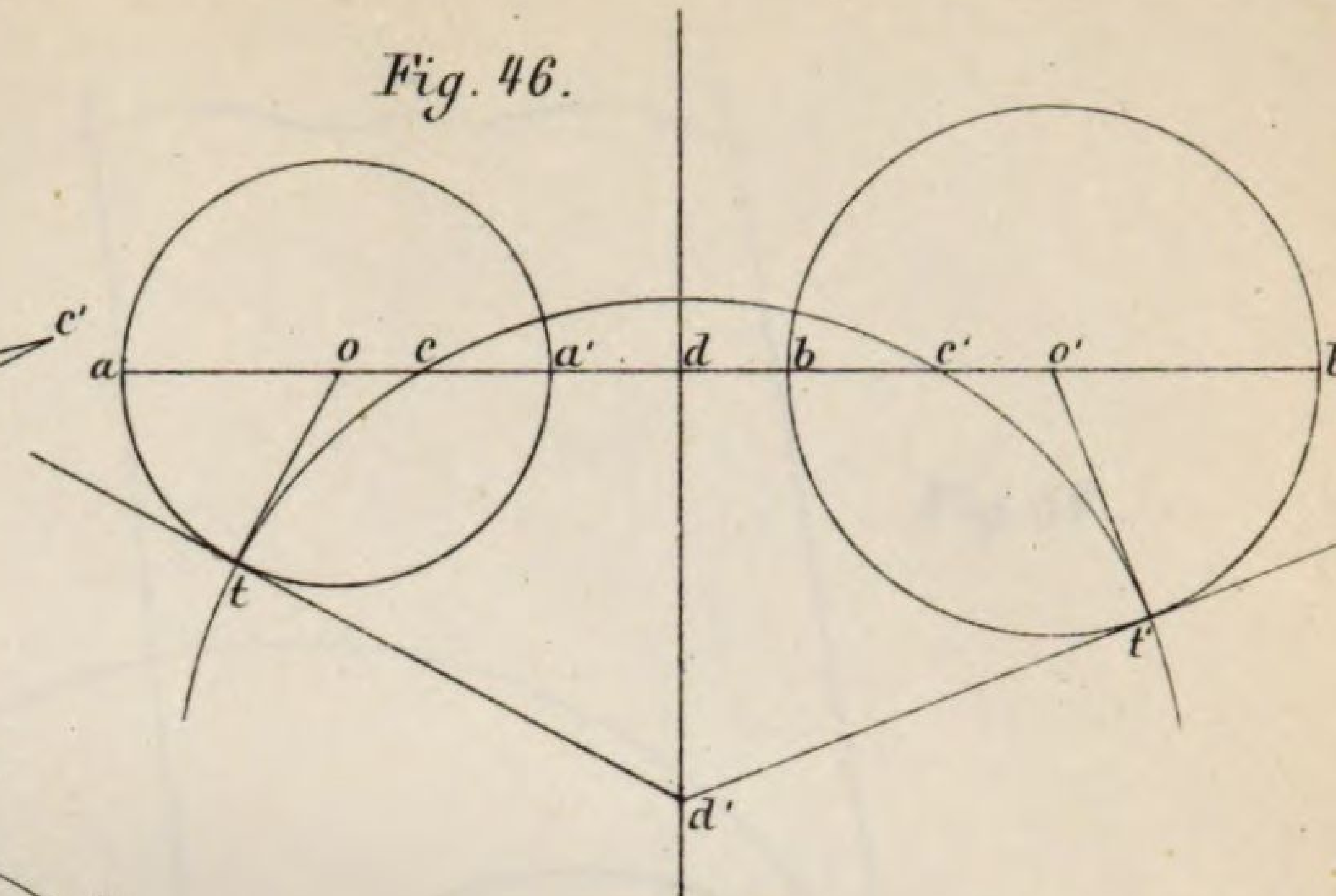


Fig. 47.

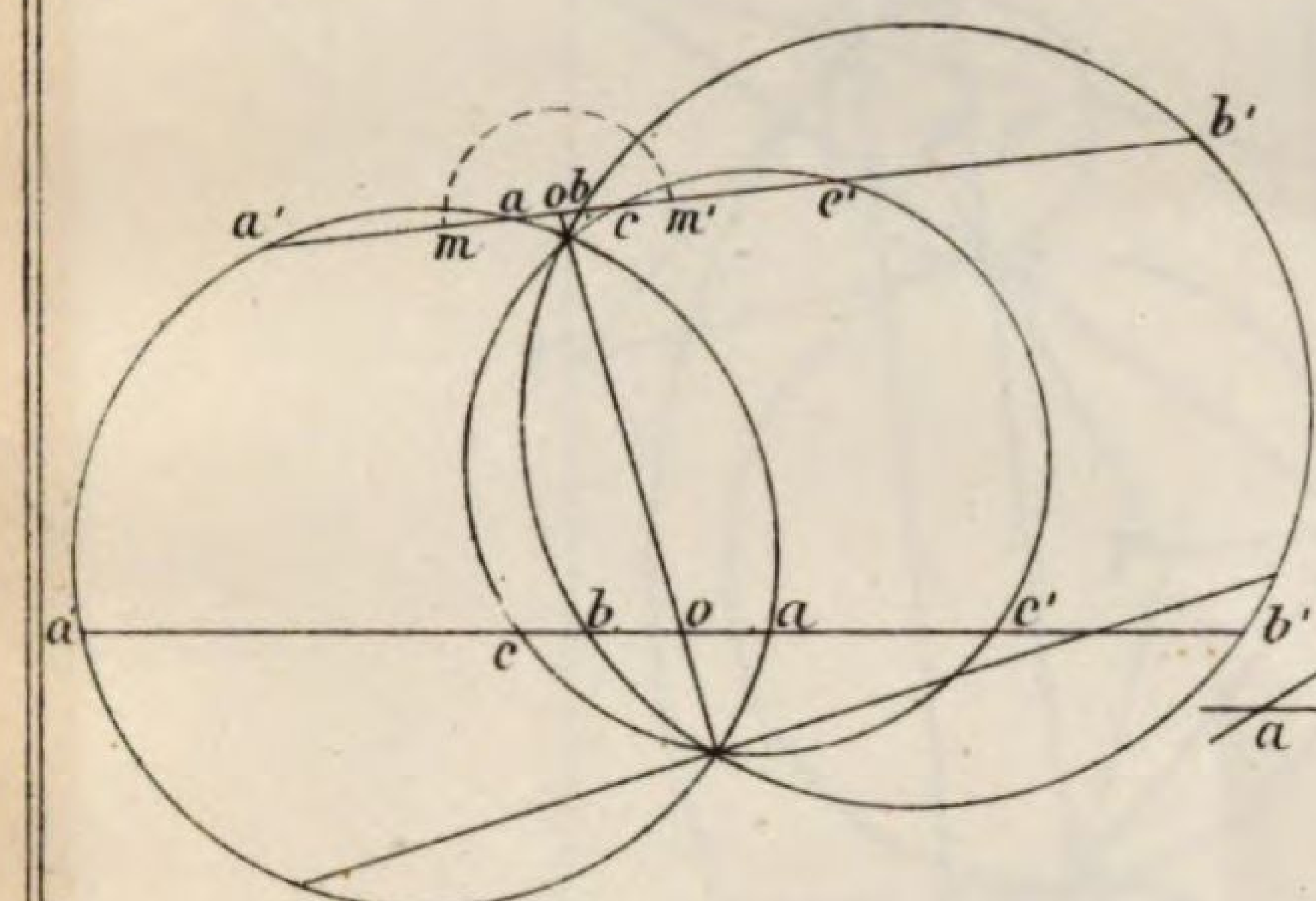


Fig. 49.

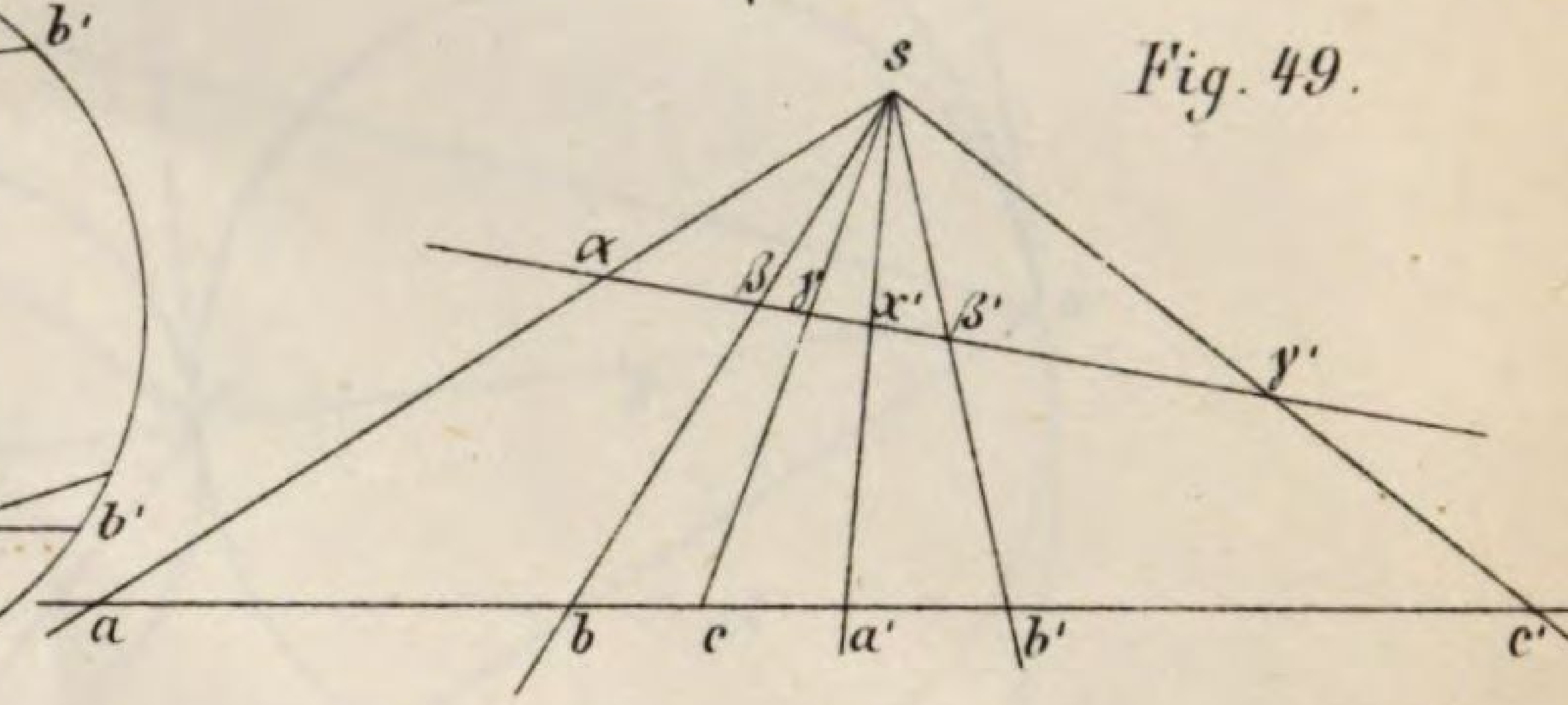


Fig. 50.

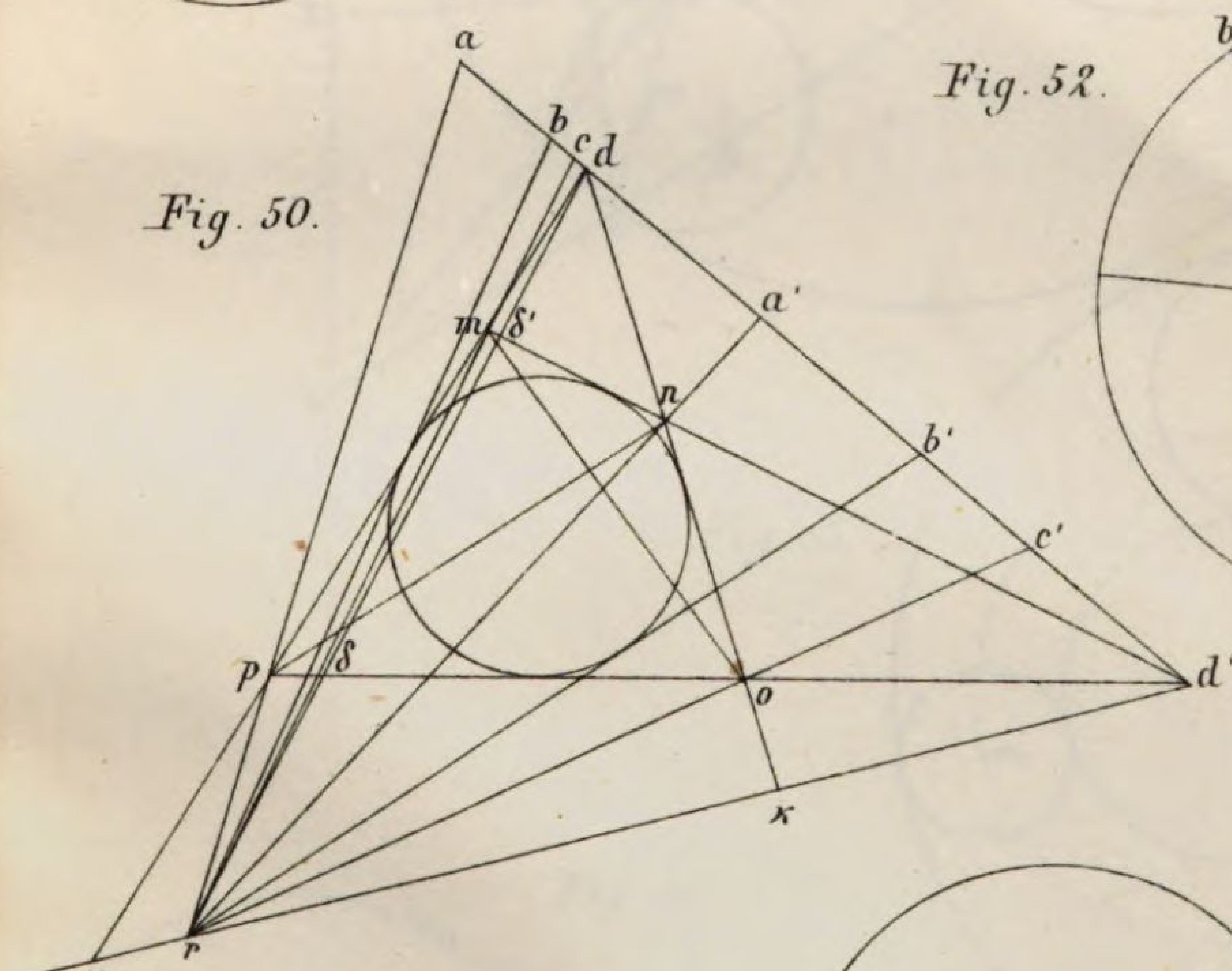
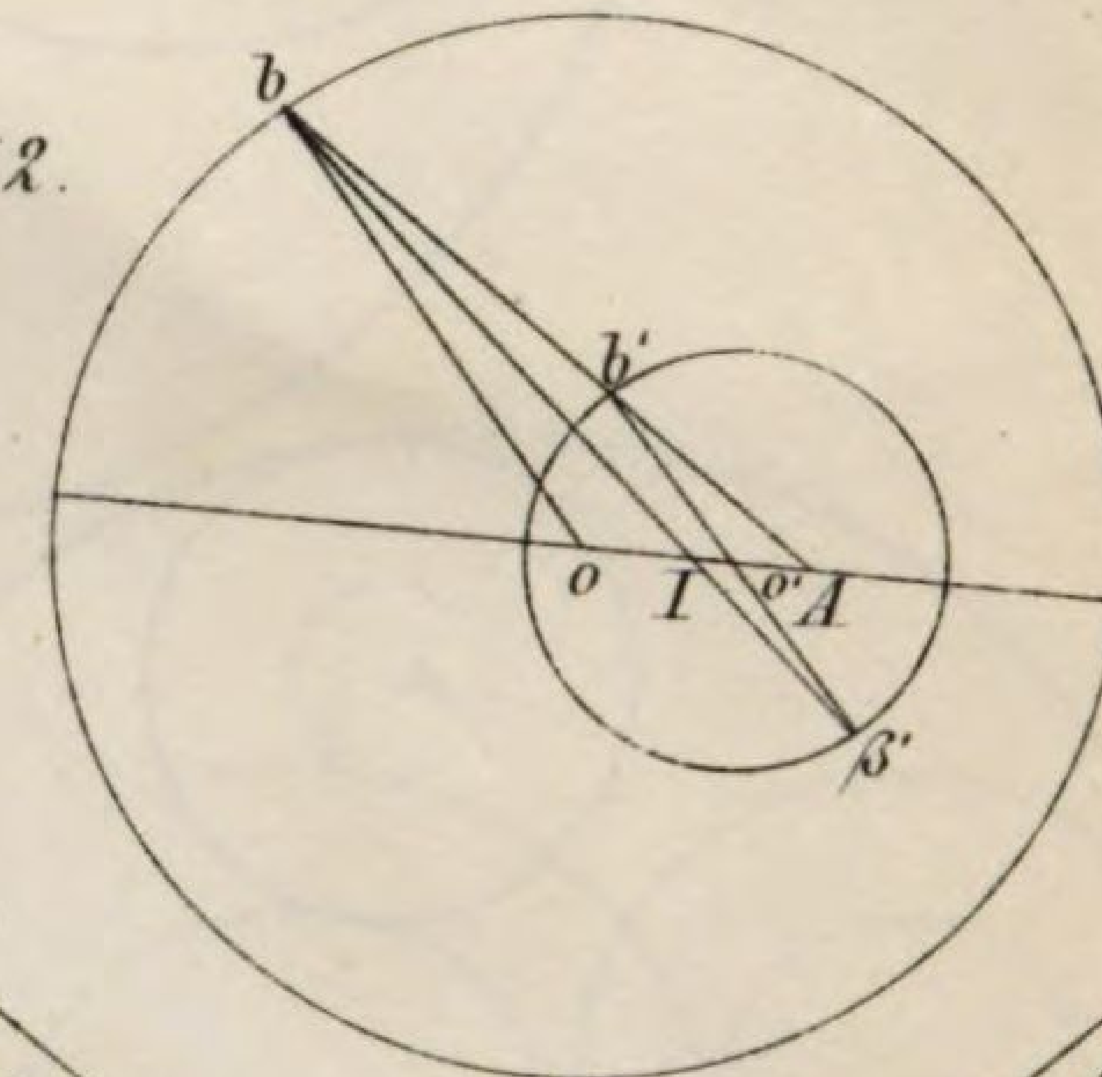


Fig. 52.



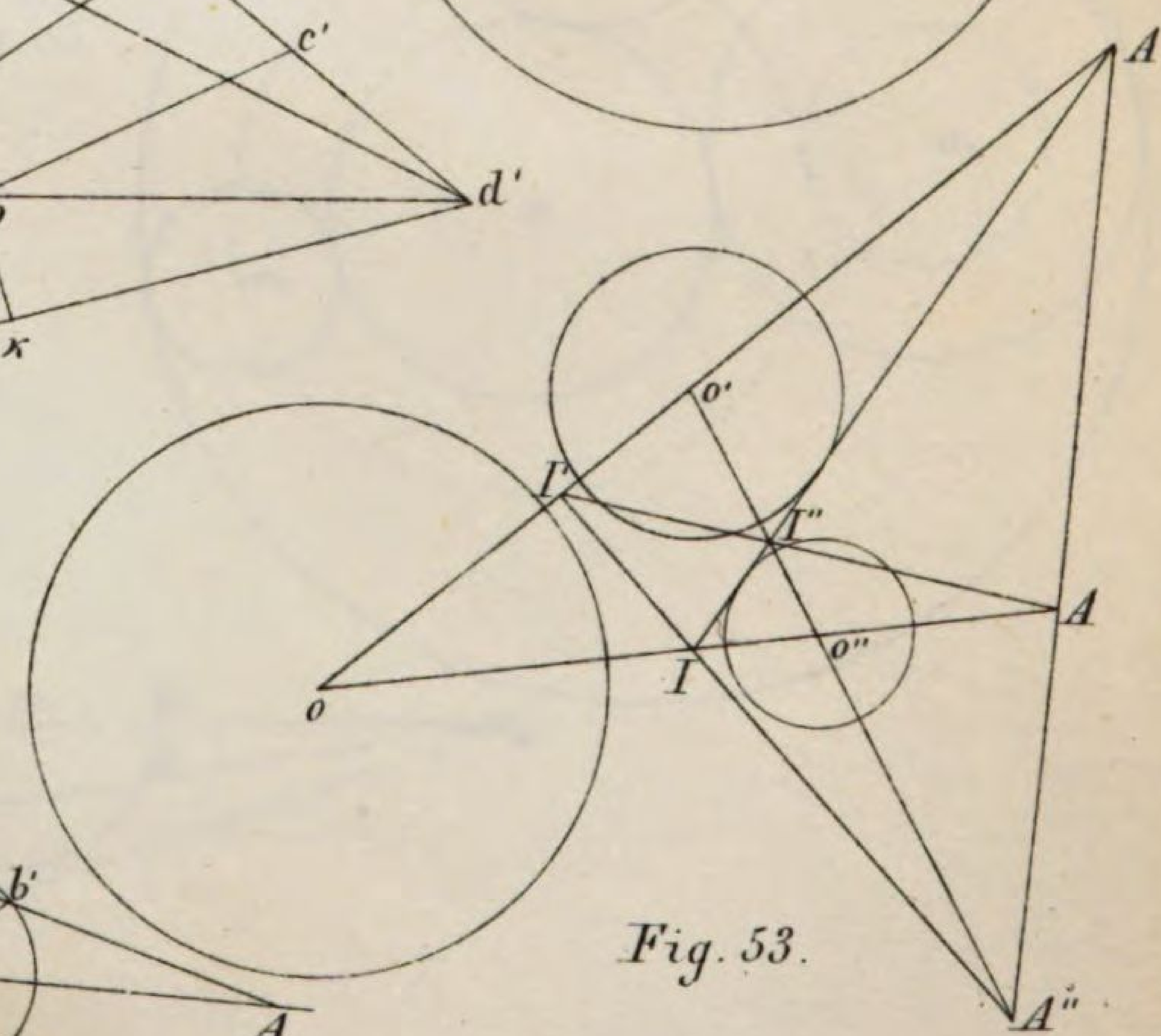
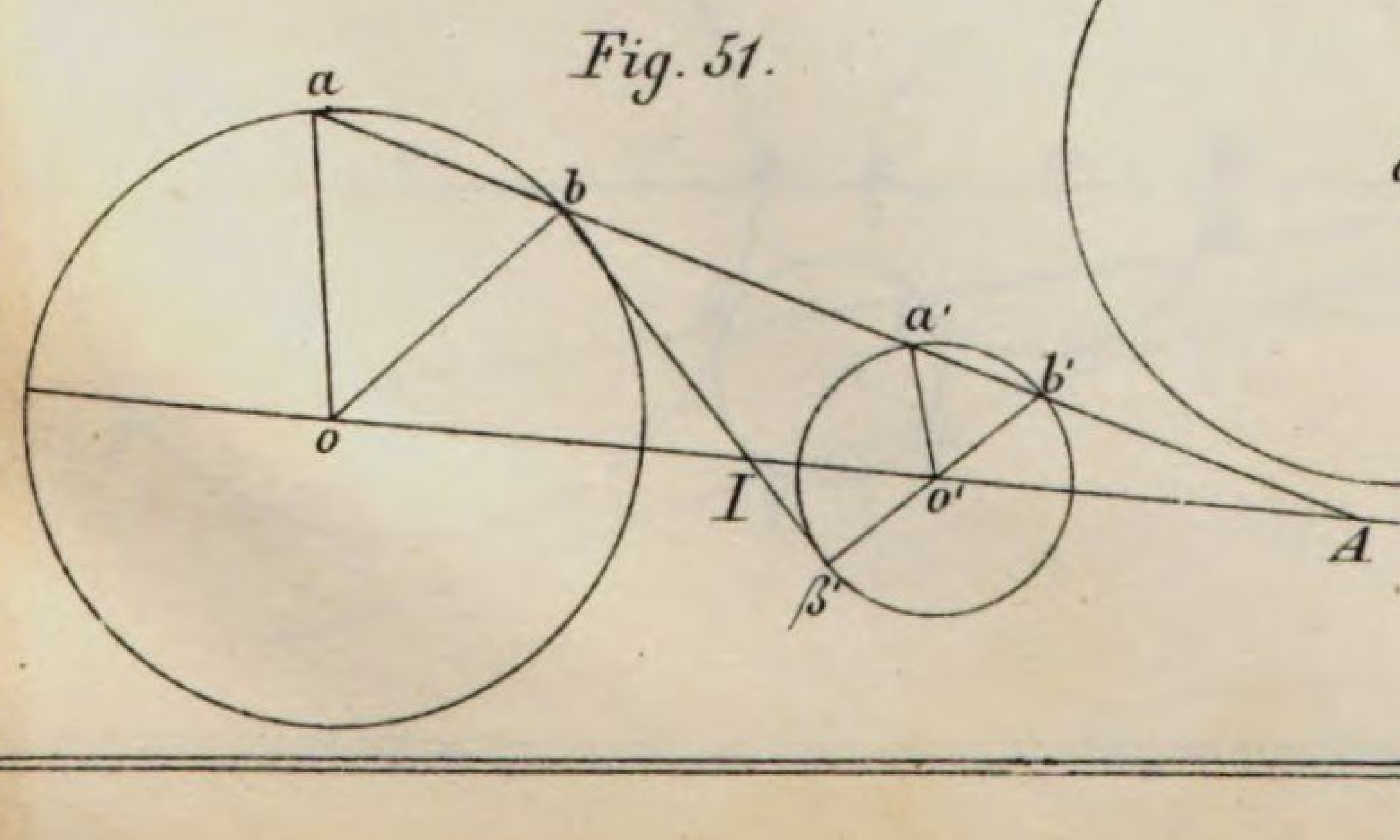


Fig. 53.

Fig. 51.



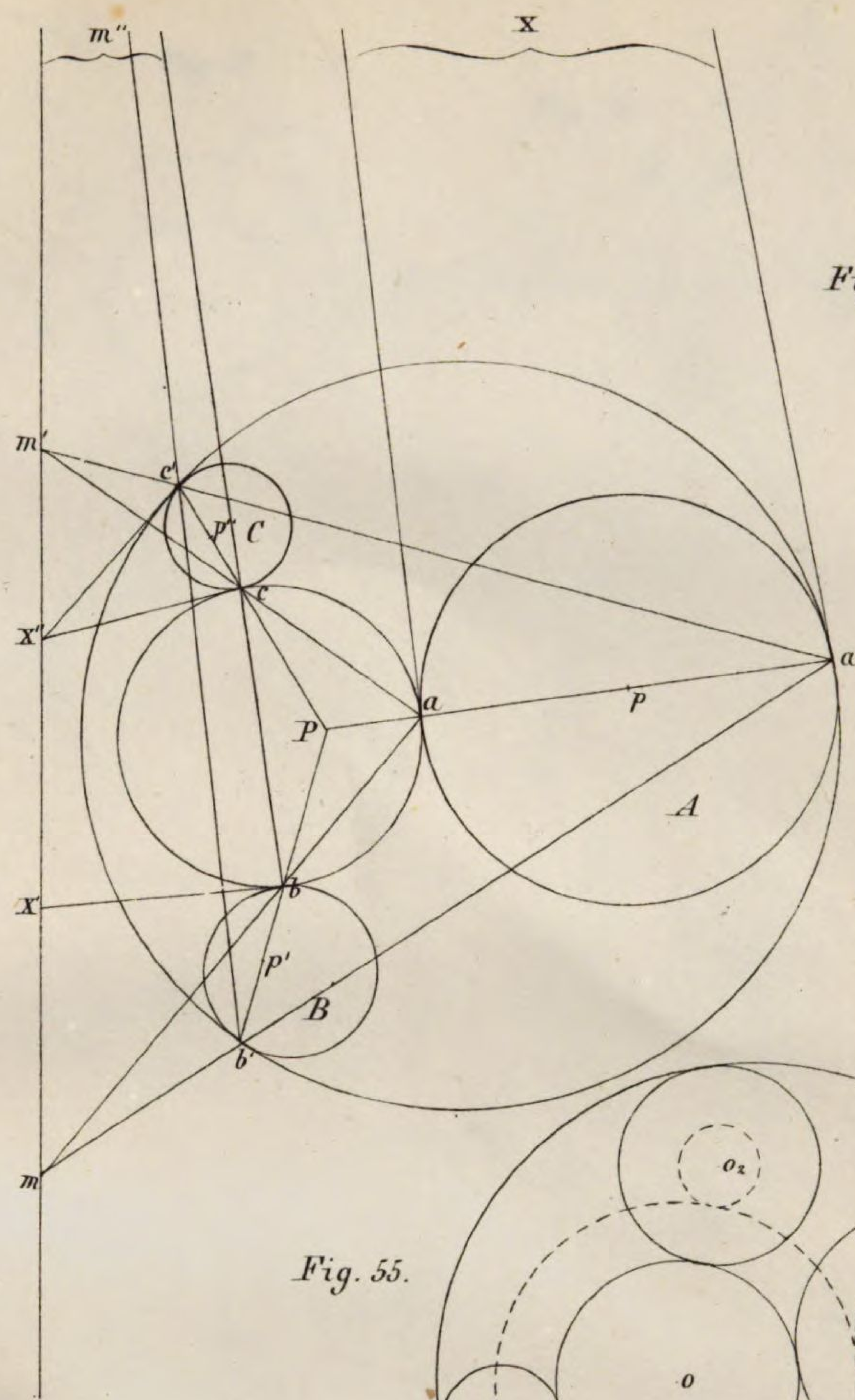


Fig. 54.

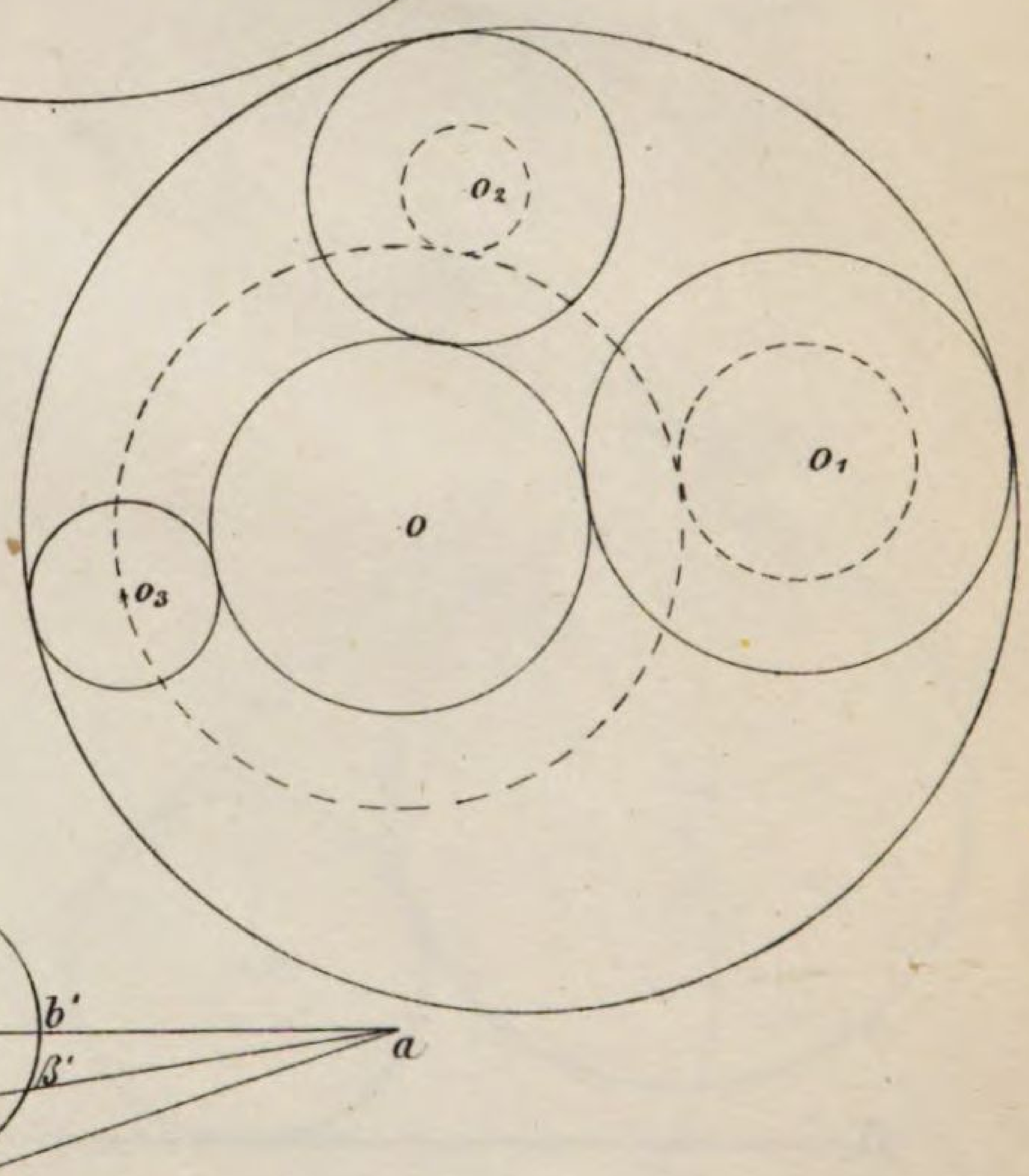
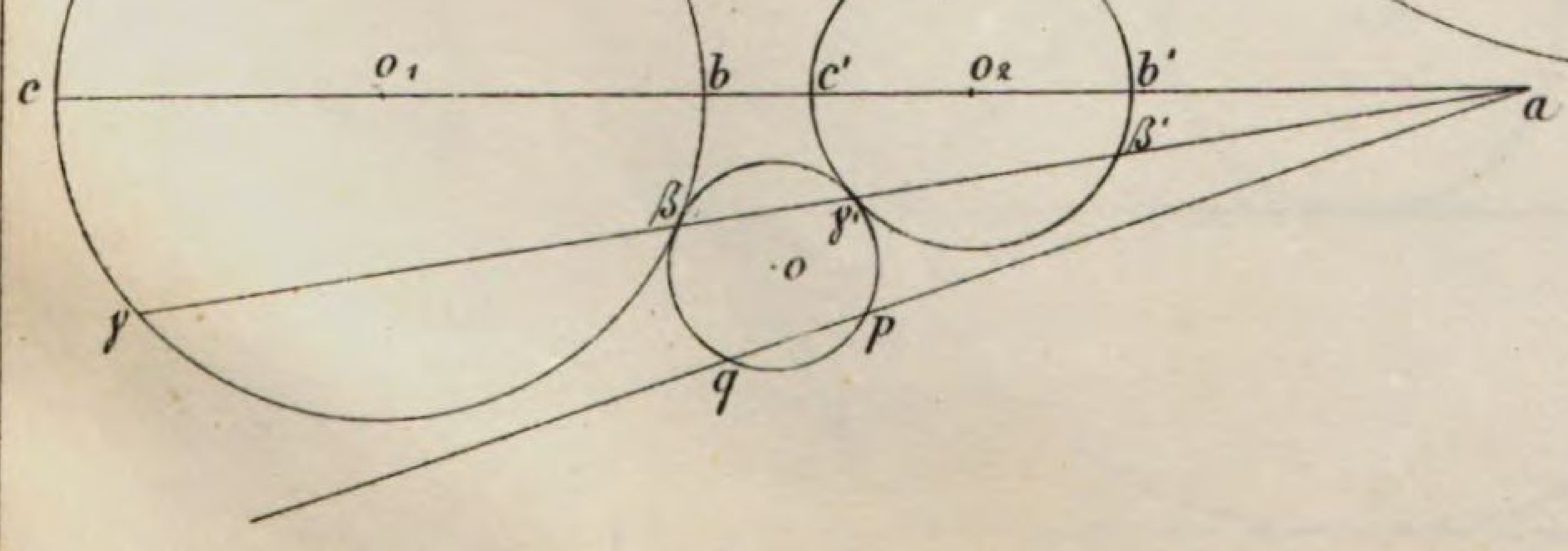


Fig. 55.

Fig. 56.



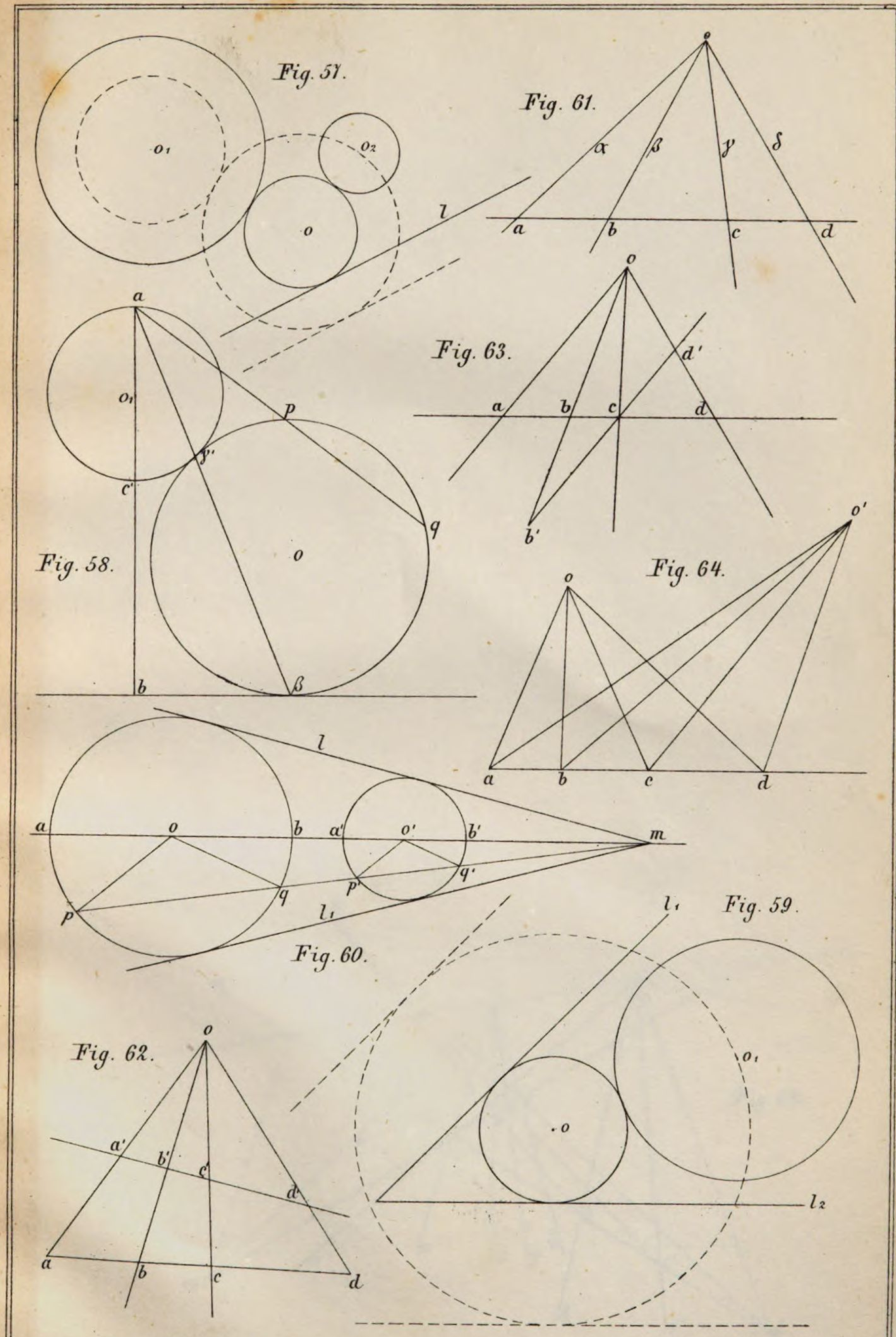

Fig. 57.
Fig. 61.
Fig. 63.
Fig. 58.
Fig. 64.
Fig. 60.
Fig. 59.
Fig. 62.

Fig. 65.

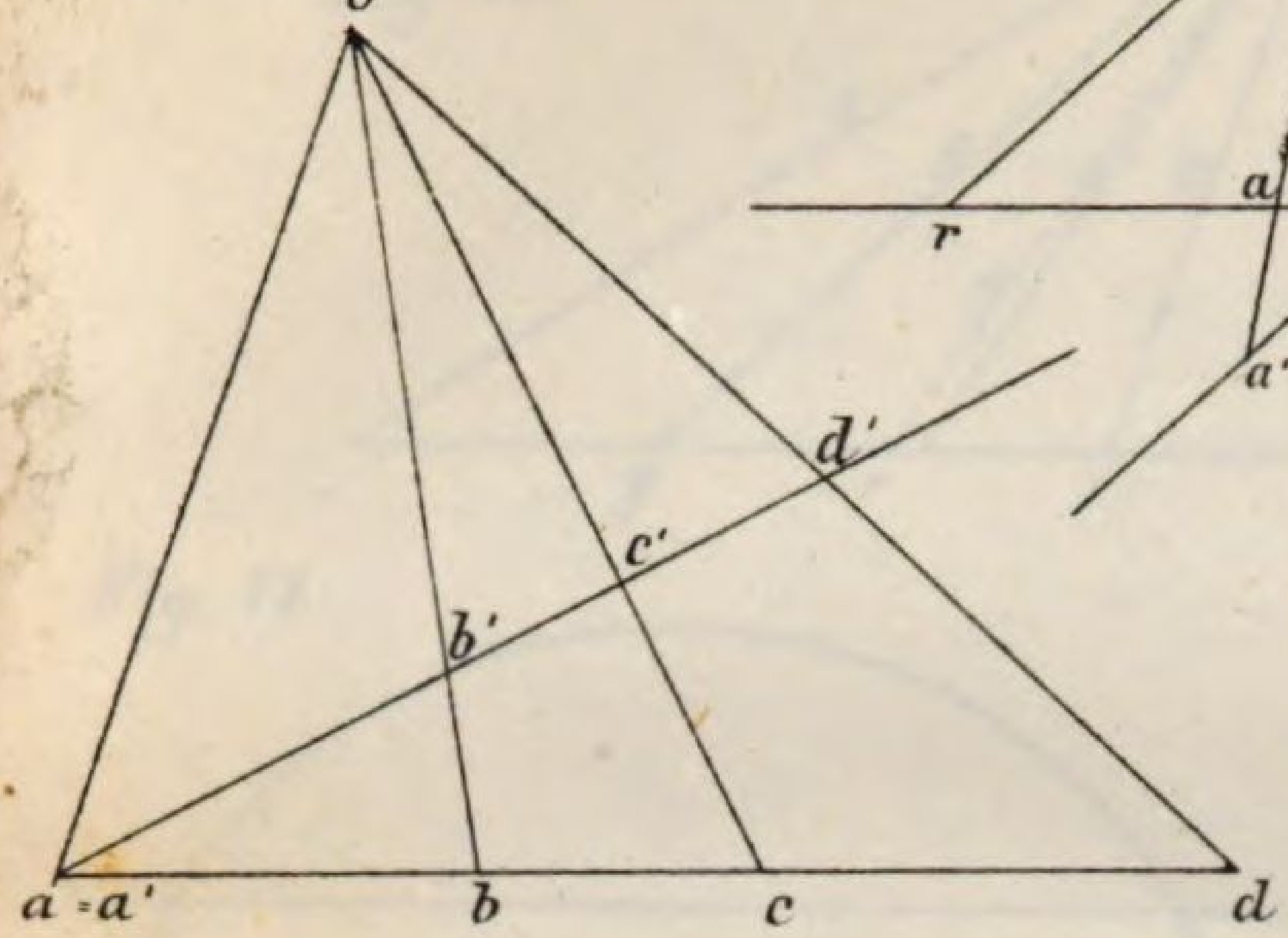


Fig. 69.

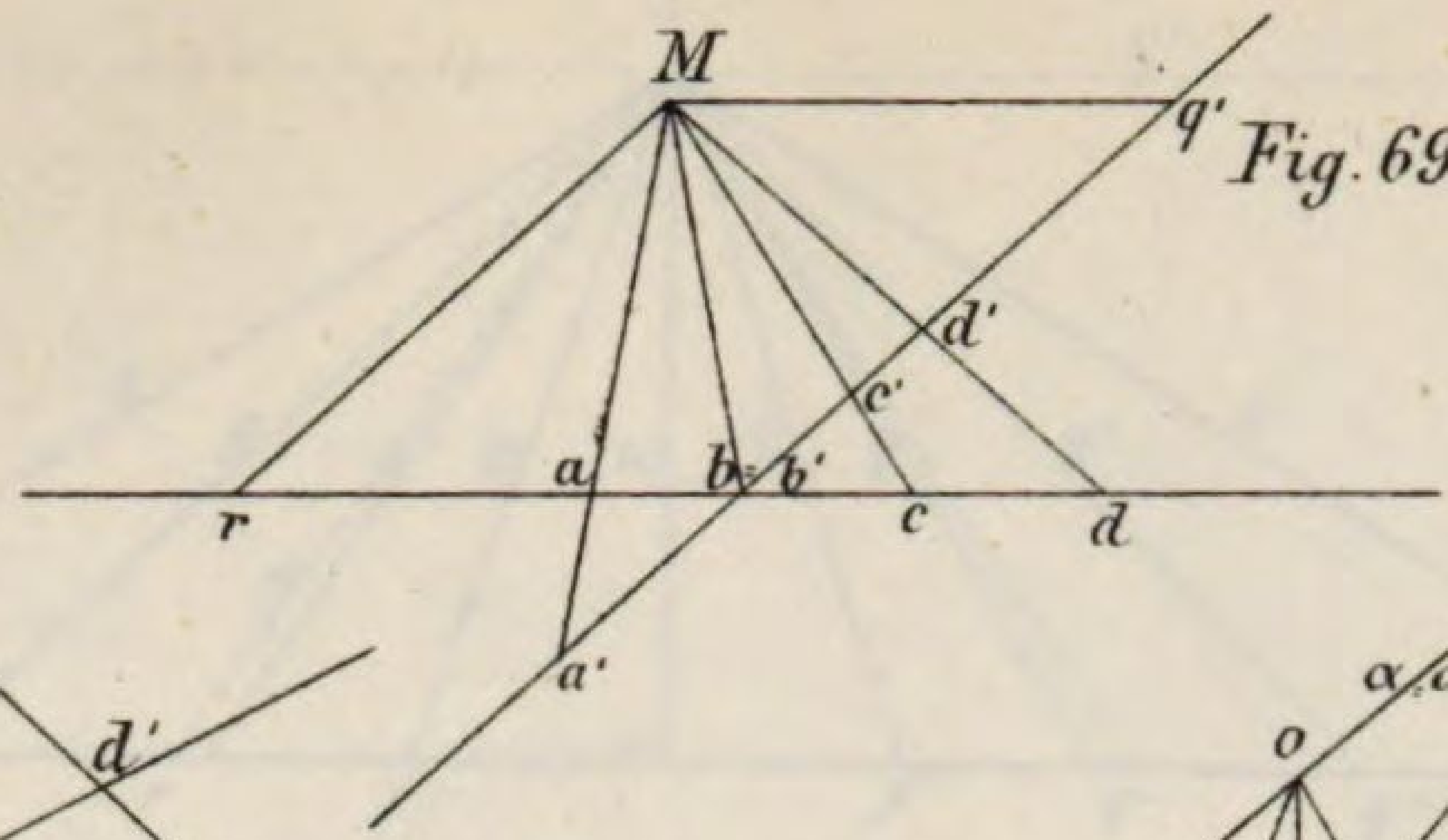


Fig. 66.

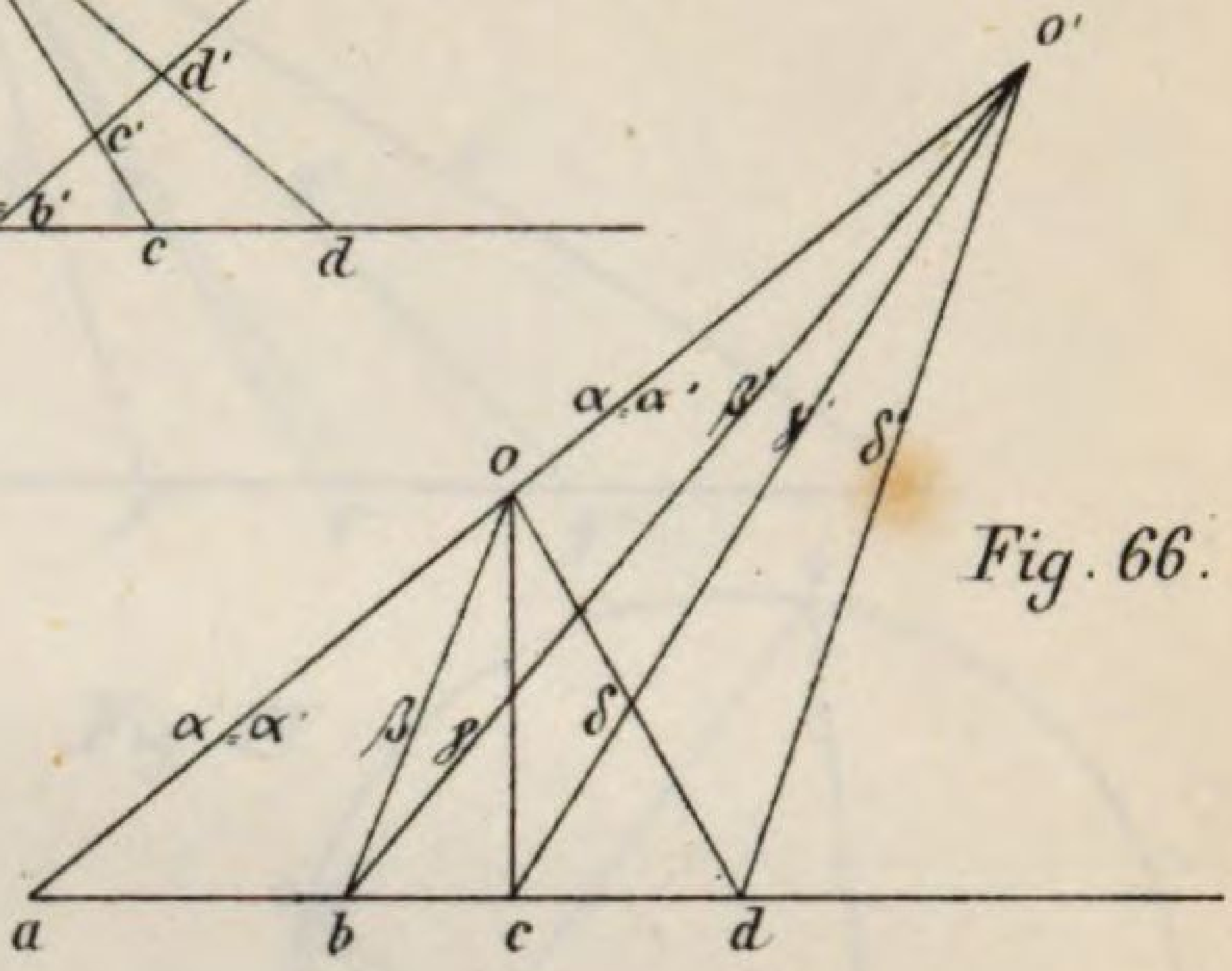


Fig. 70.

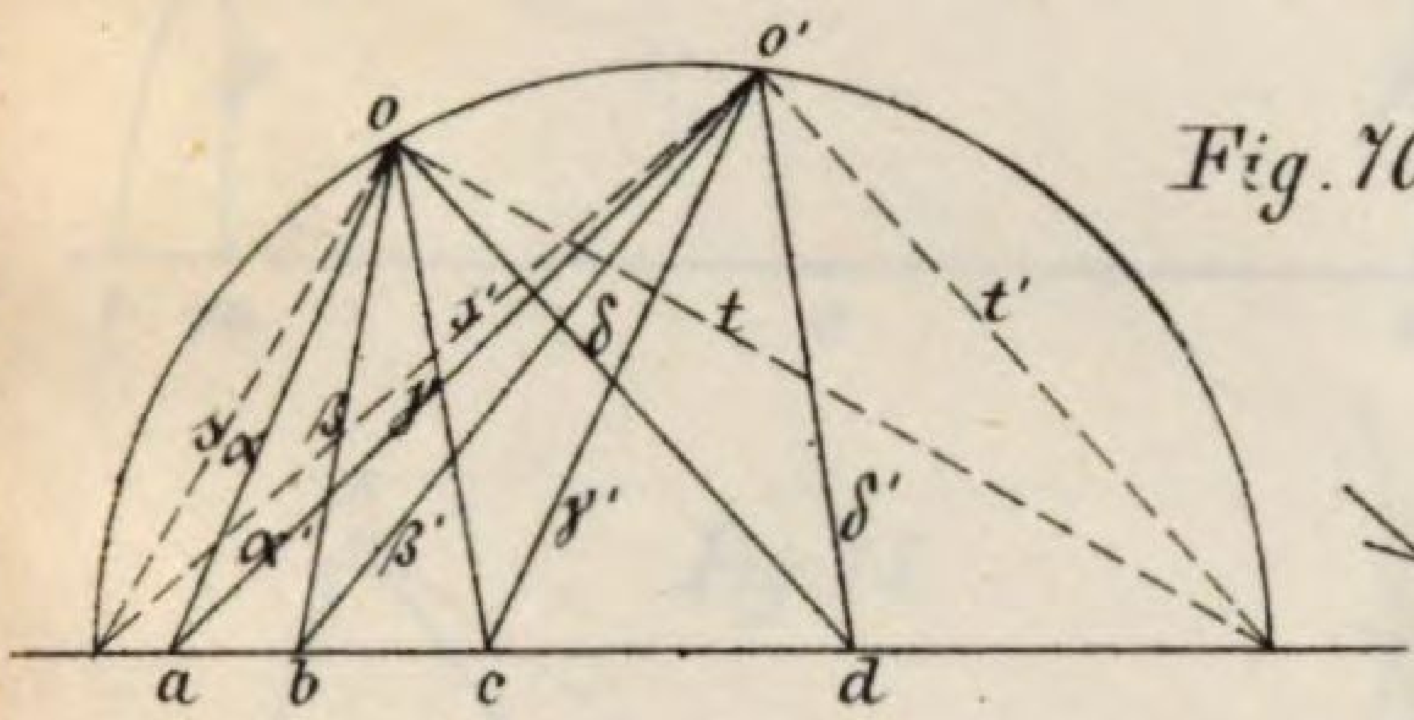


Fig. 67.

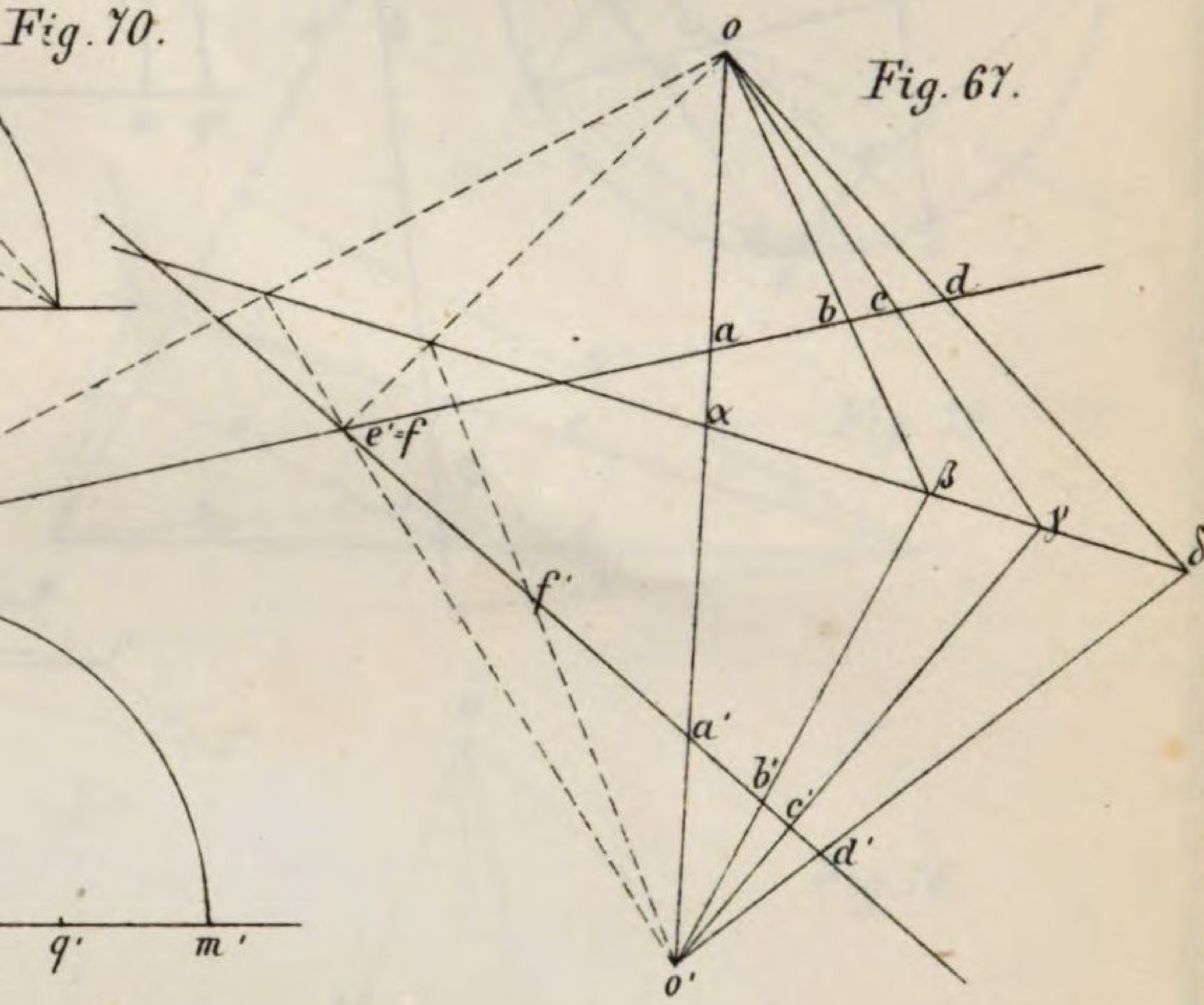


Fig. 71.

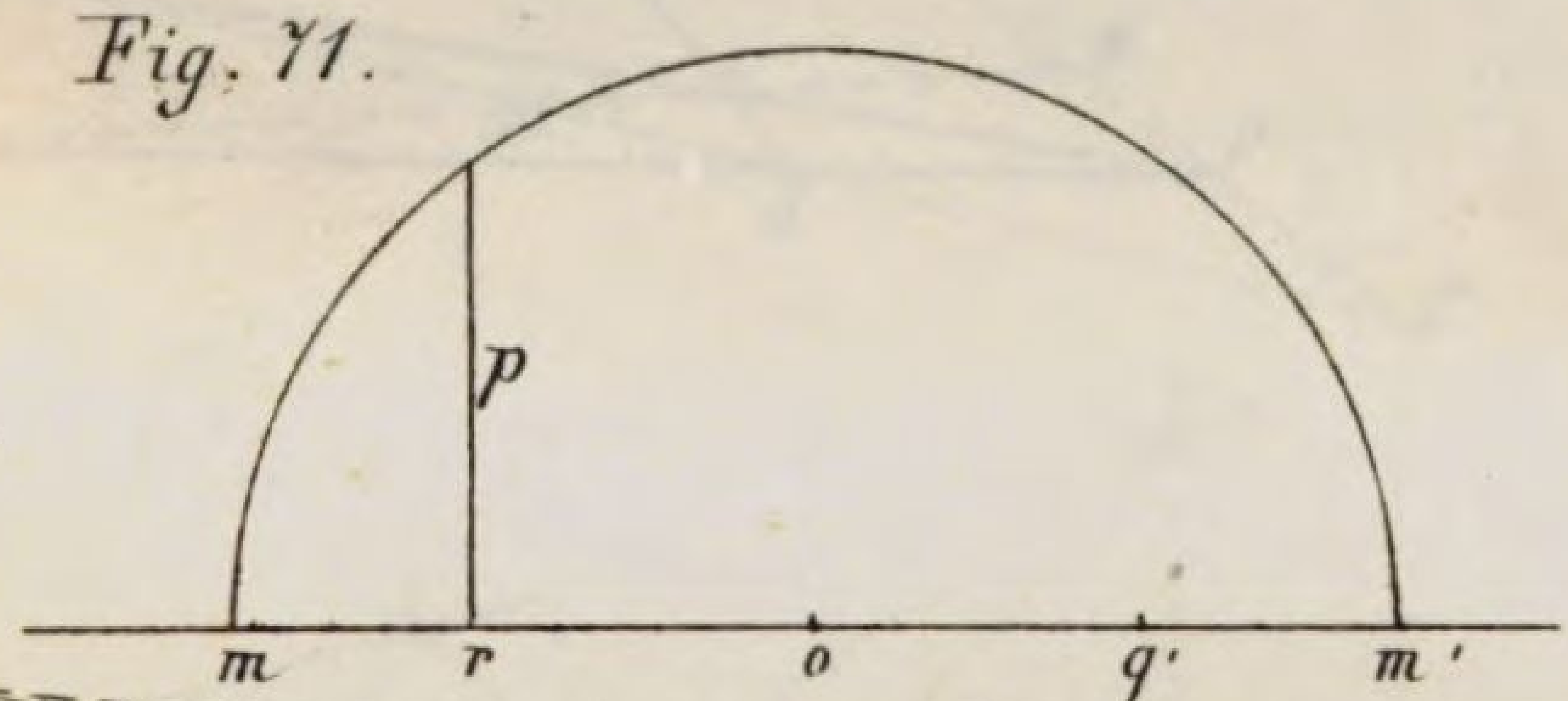


Fig. 68.

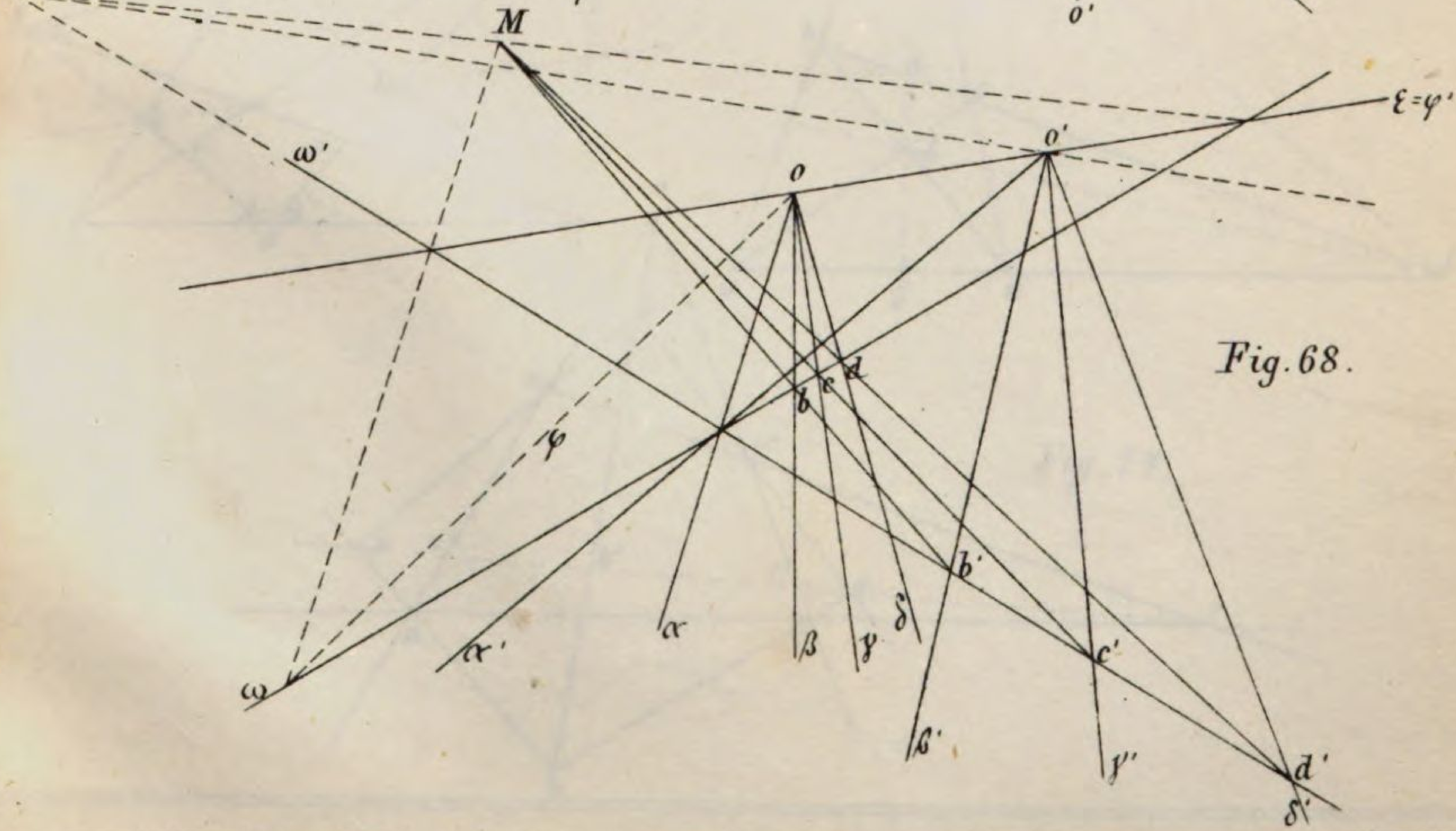


Fig. 73.

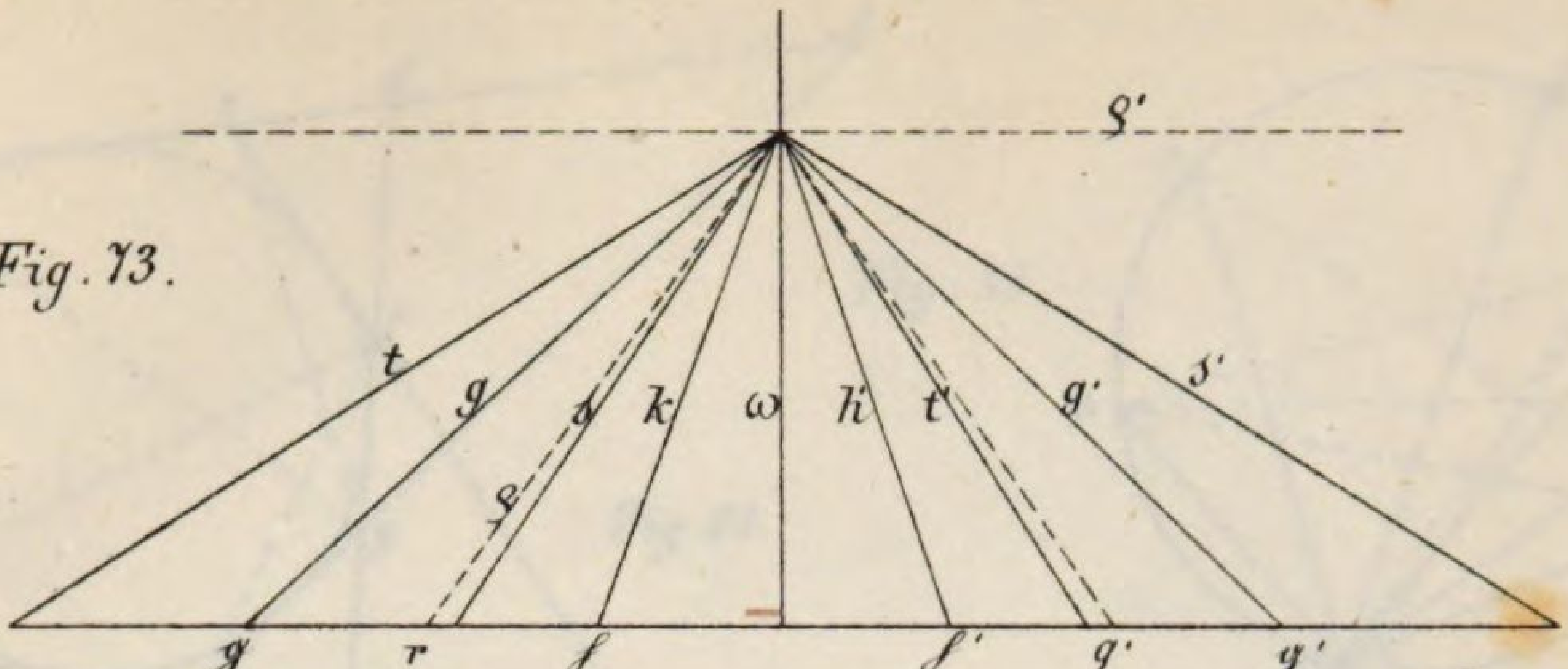


Fig. 72.

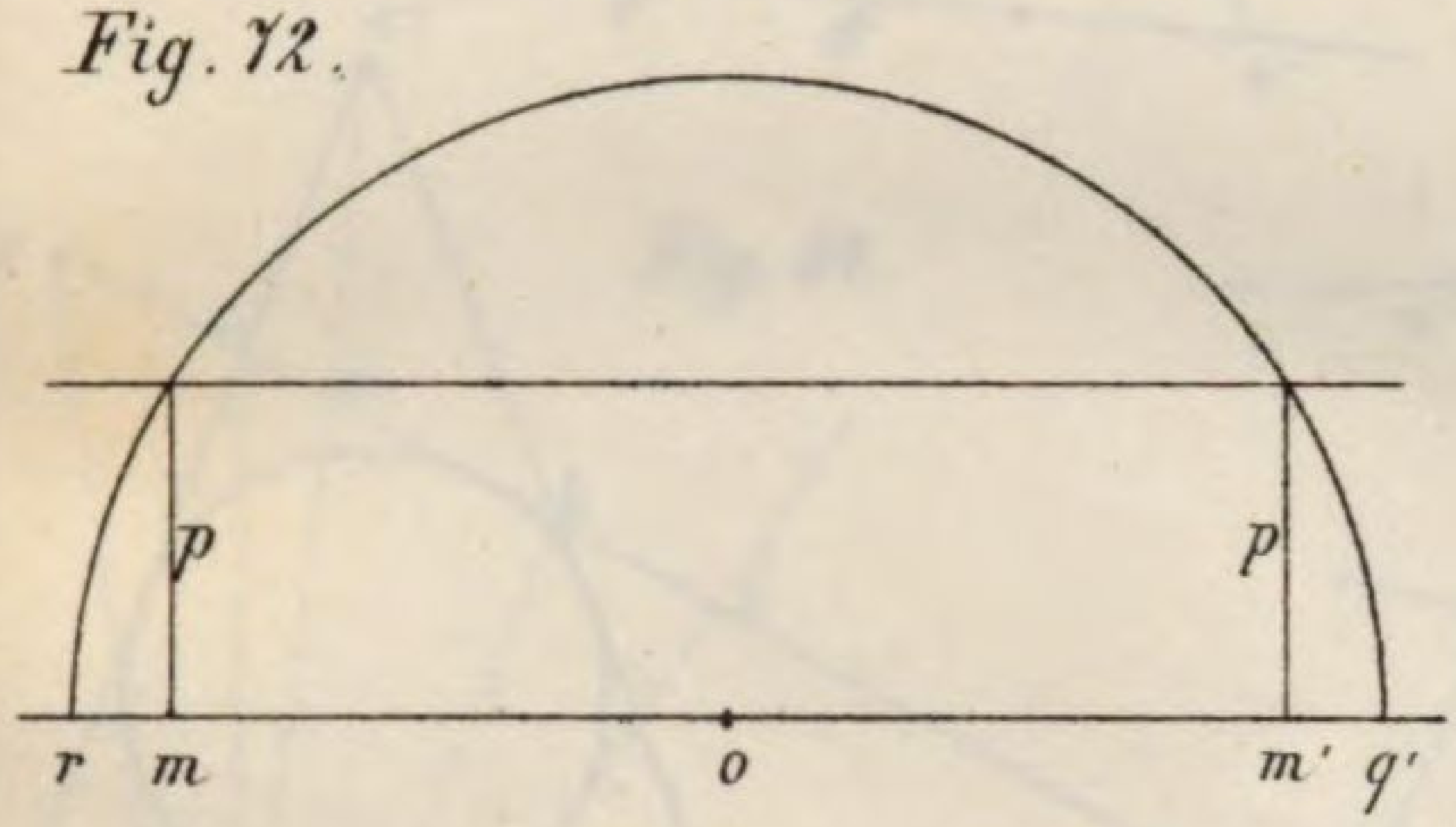


Fig. 77.

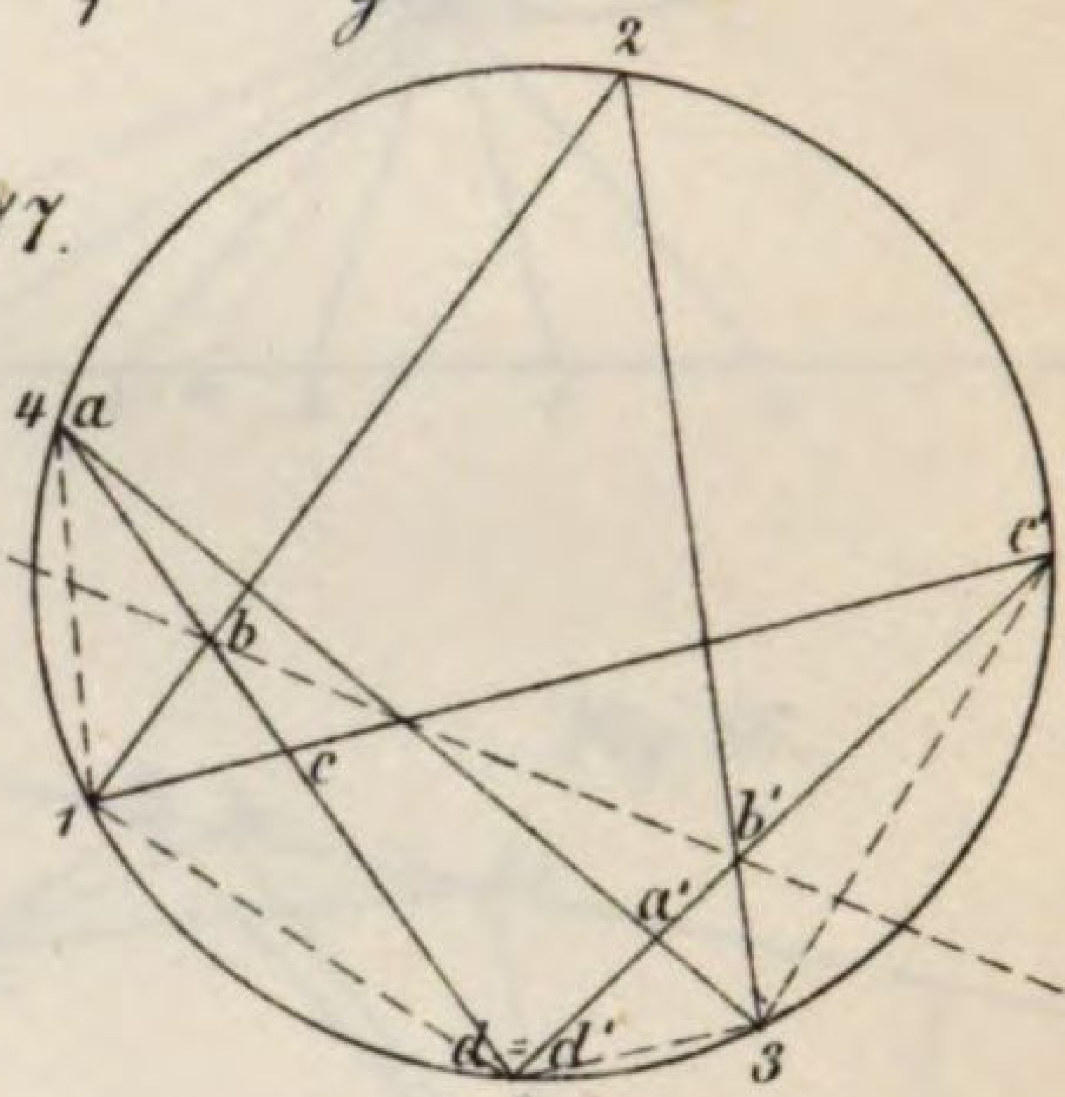


Fig. 75.

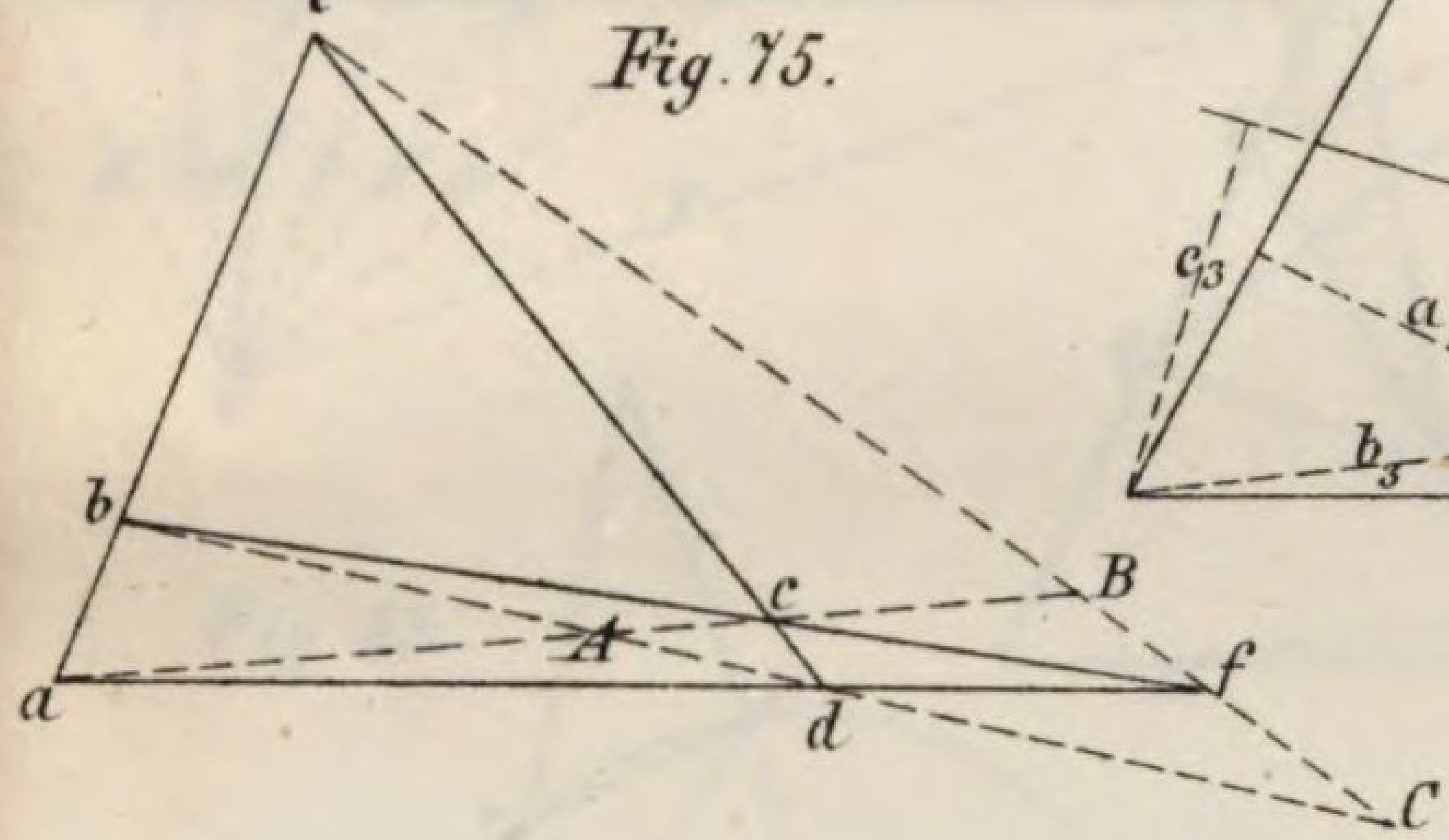


Fig. 79.

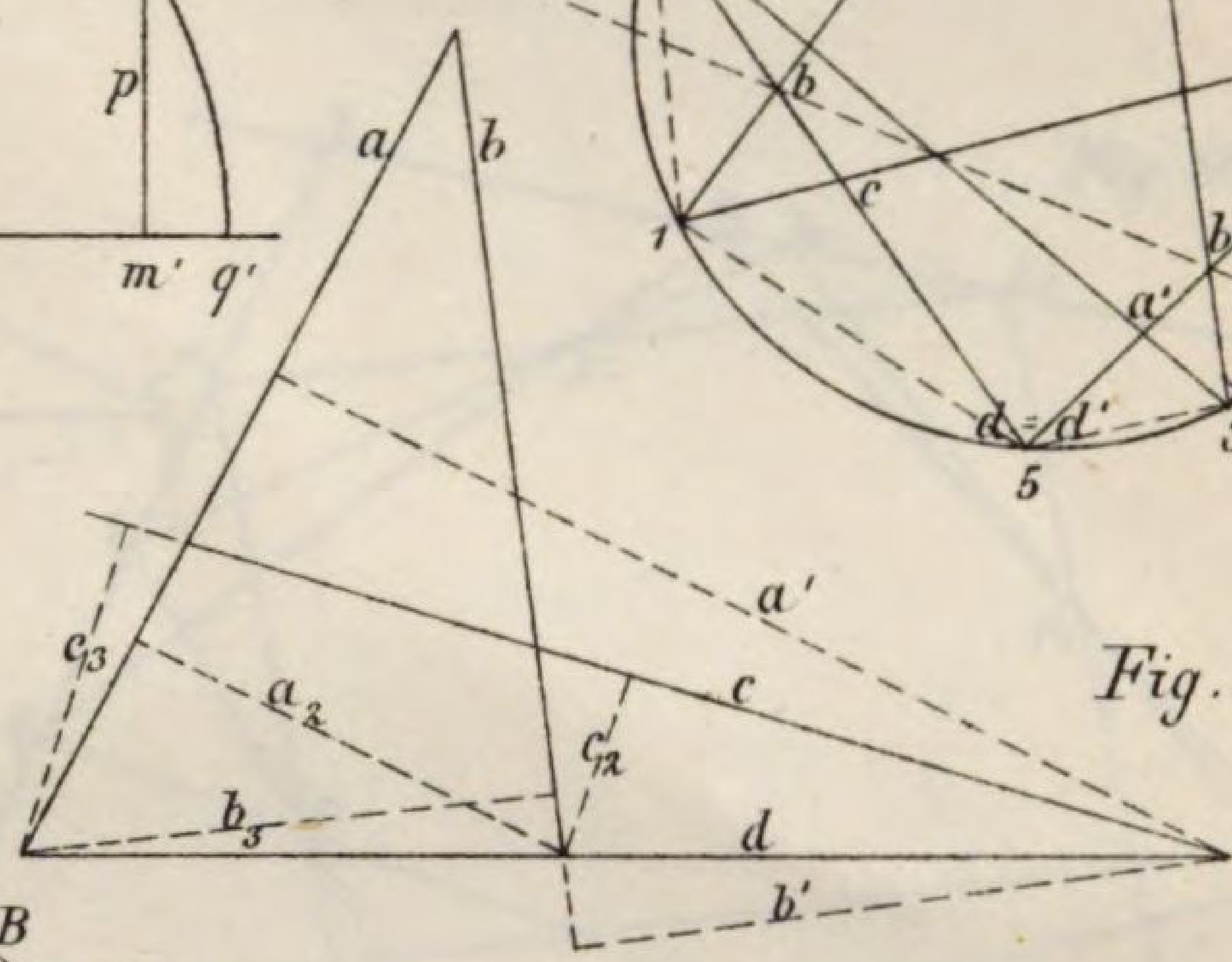


Fig. 78.

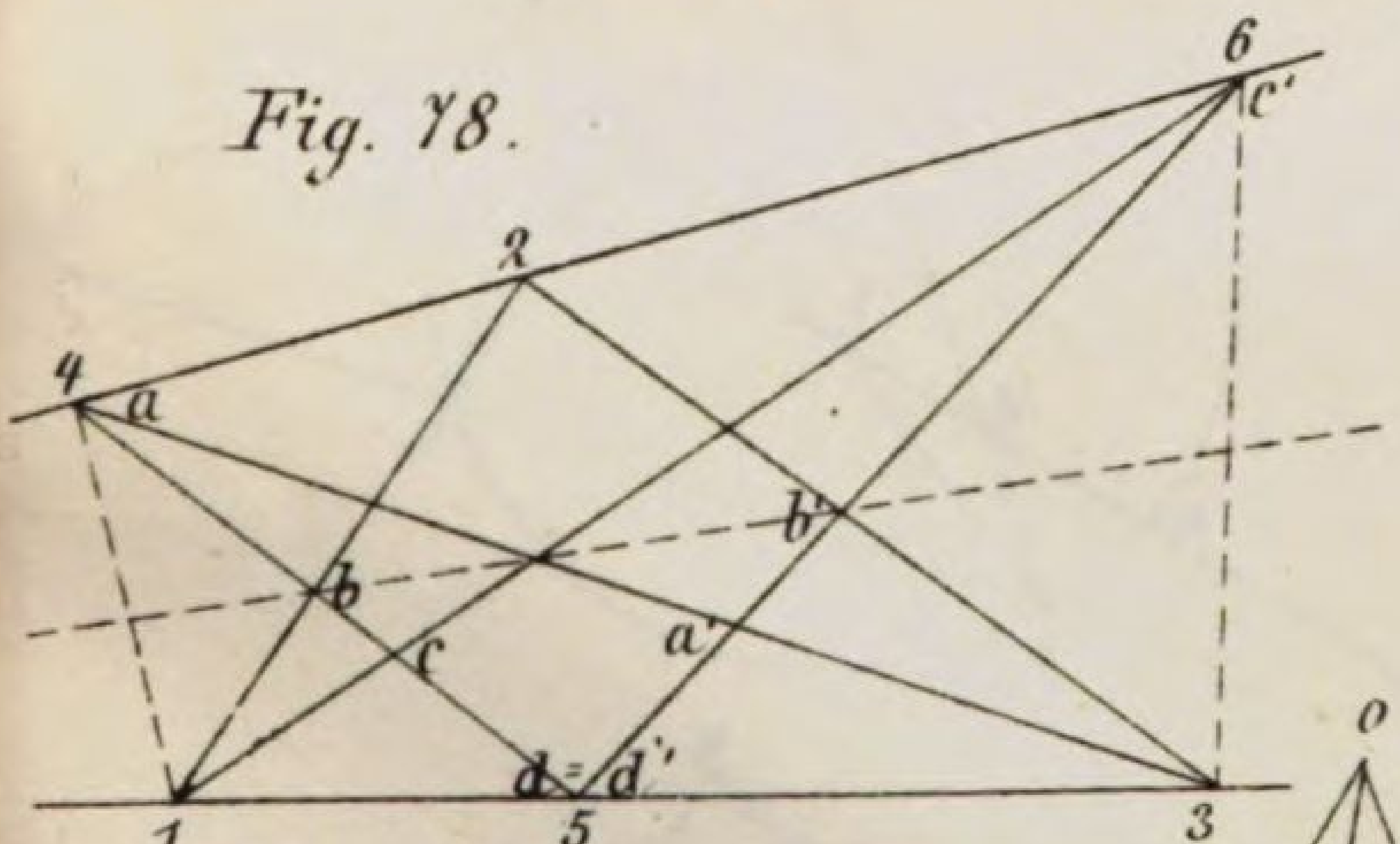


Fig. 76.

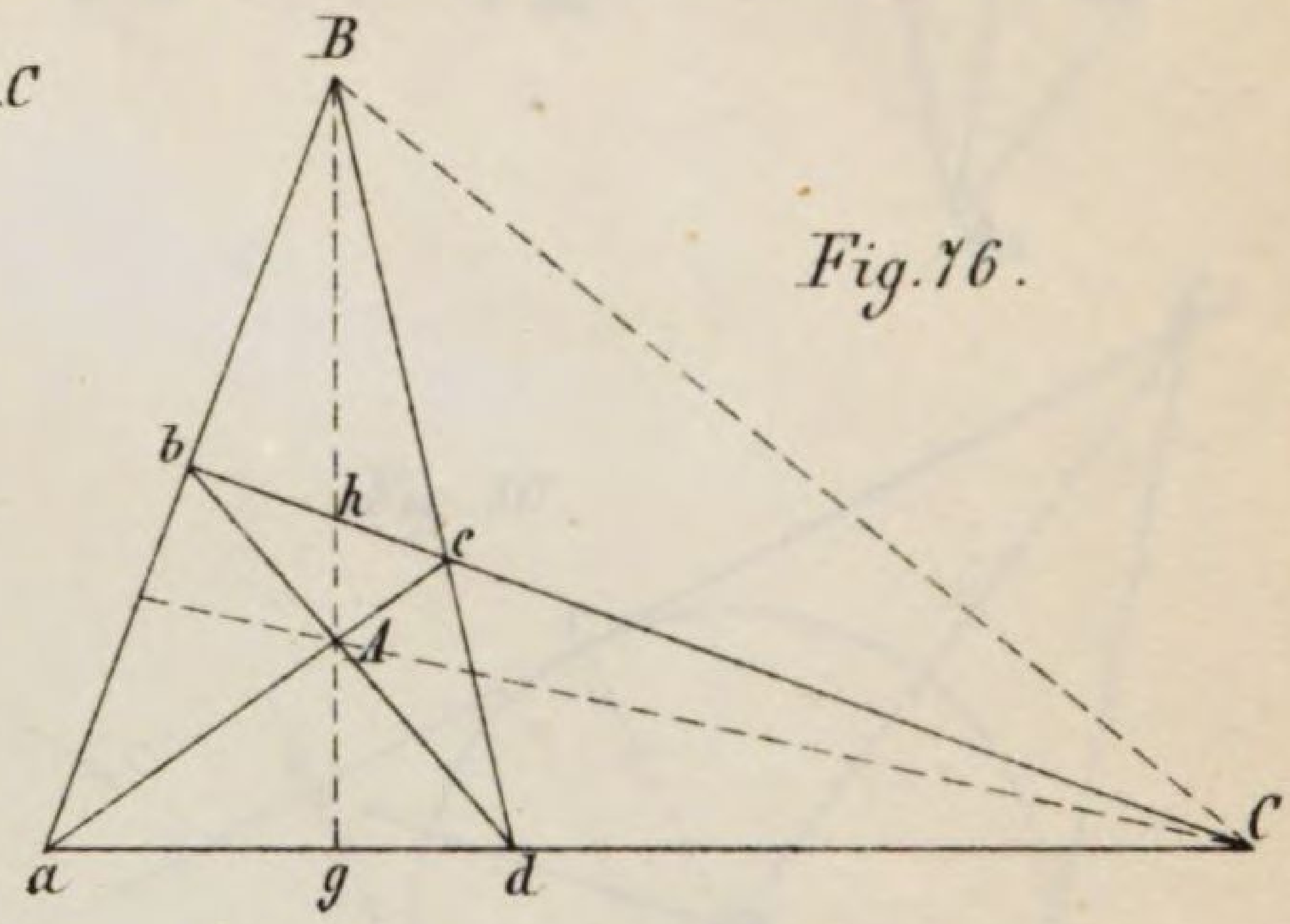
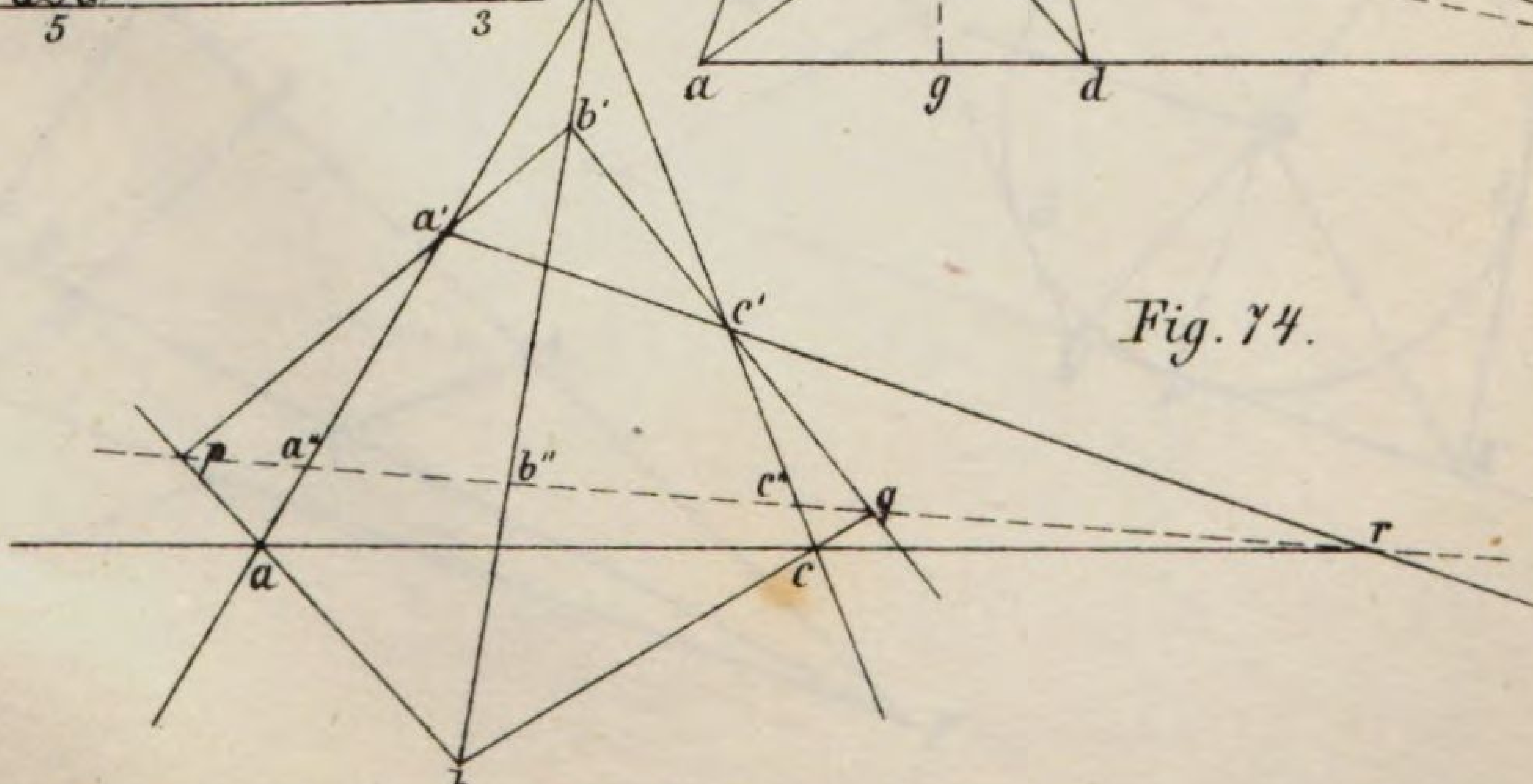


Fig. 74.



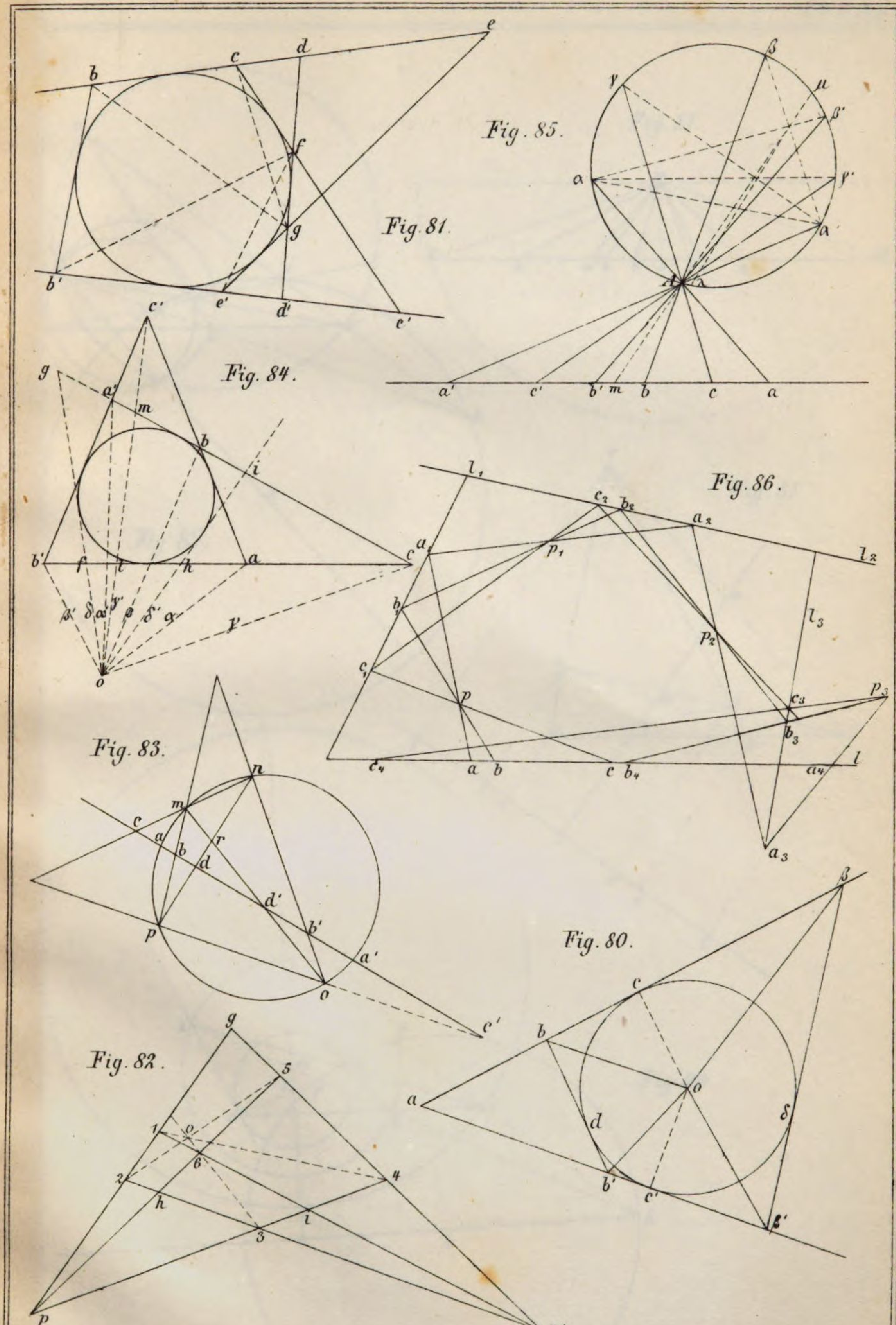


Fig. 81. Fig. 85. Fig. 84. Fig. 86. Fig. 83. Fig. 80. Fig. 82.

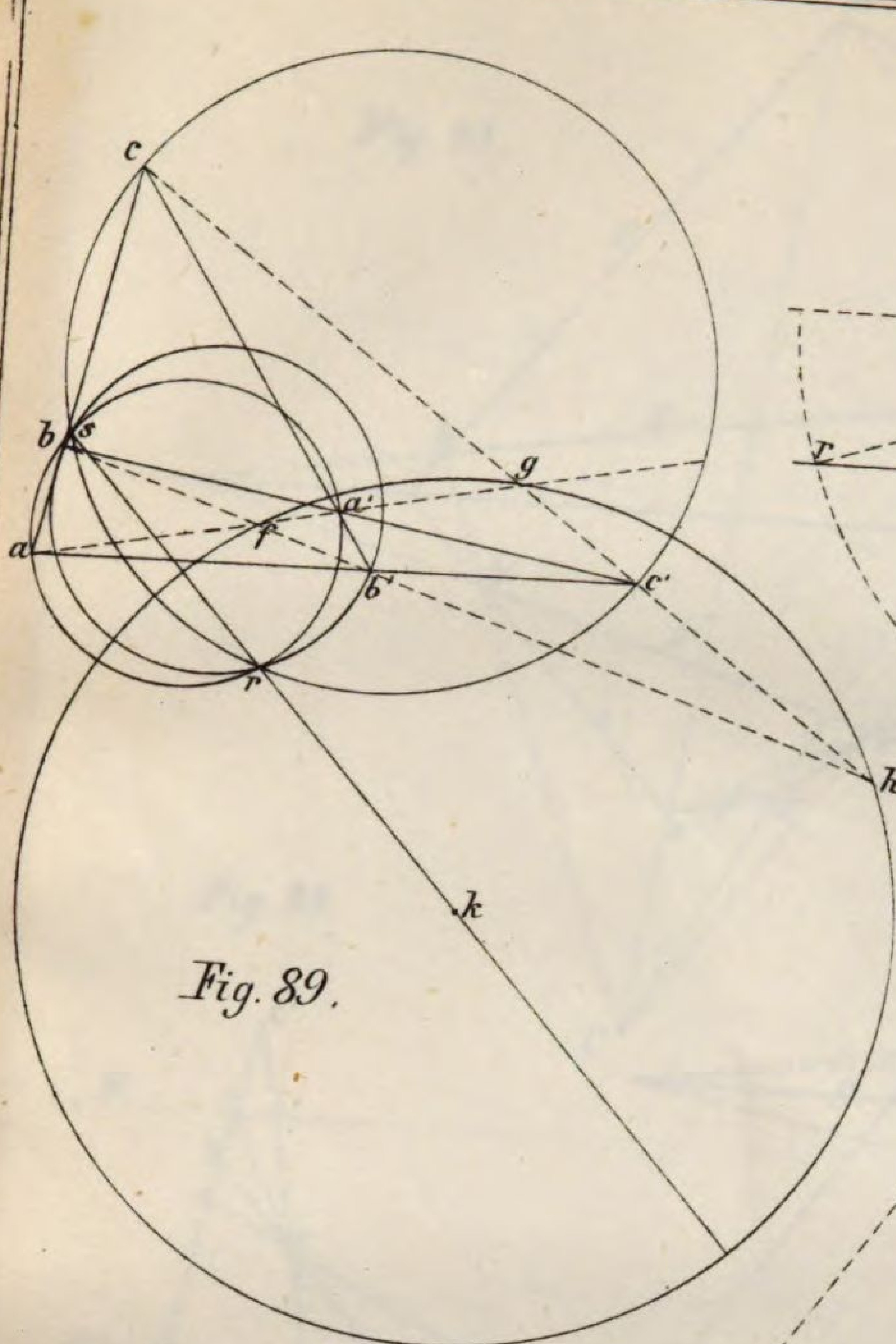


Fig. 89.

Fig. 87.

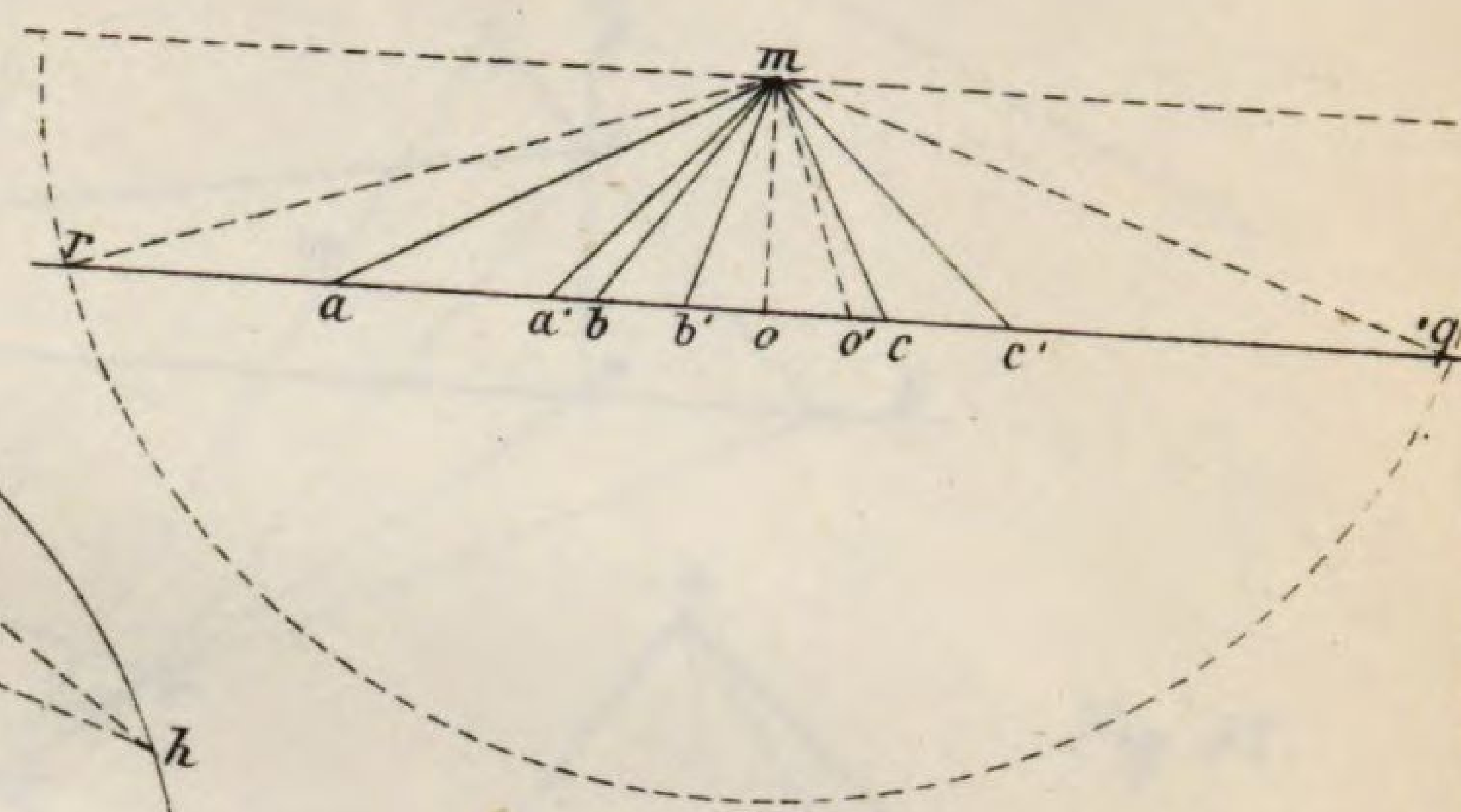
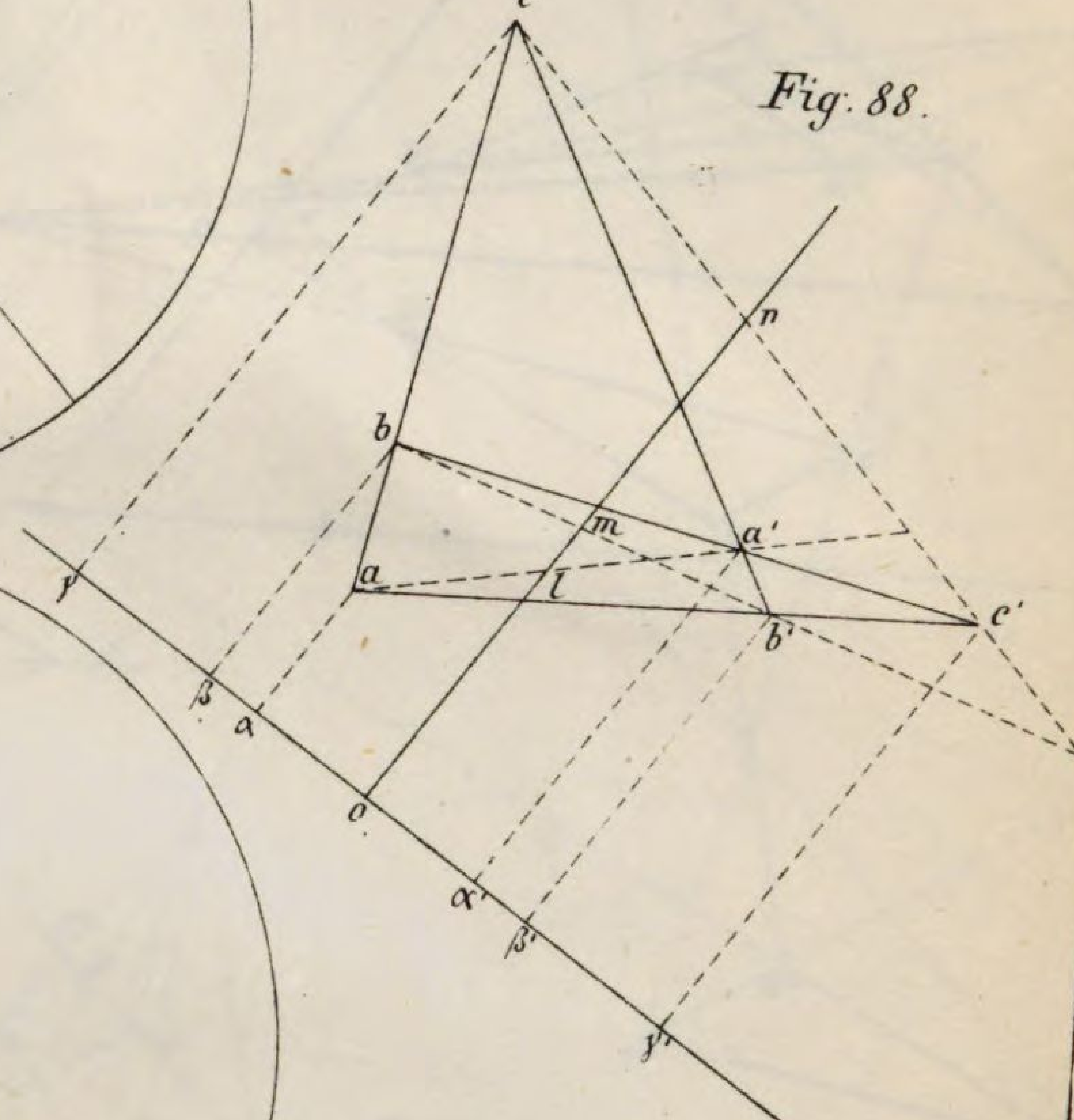


Fig. 88.



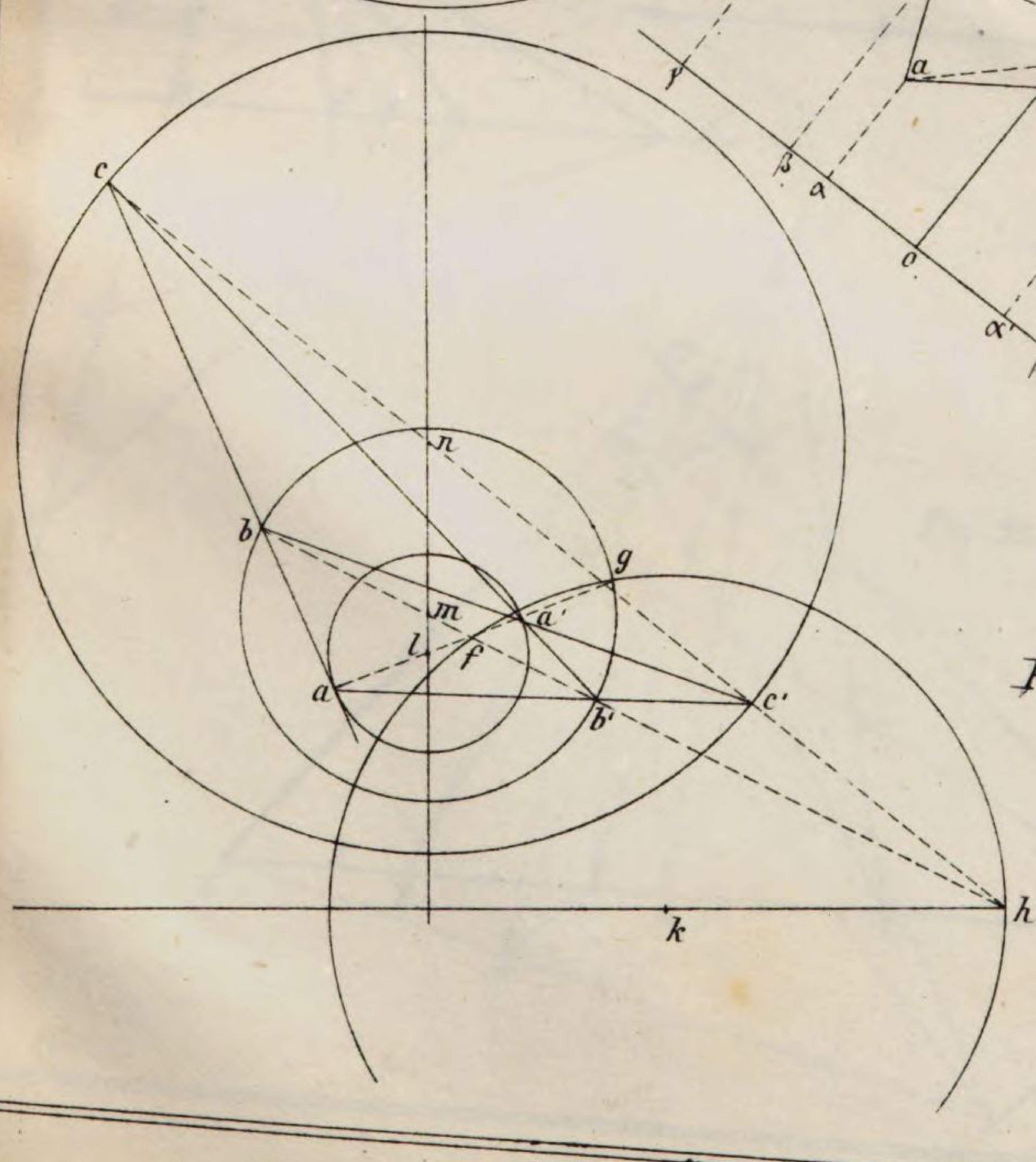


Fig. 90.

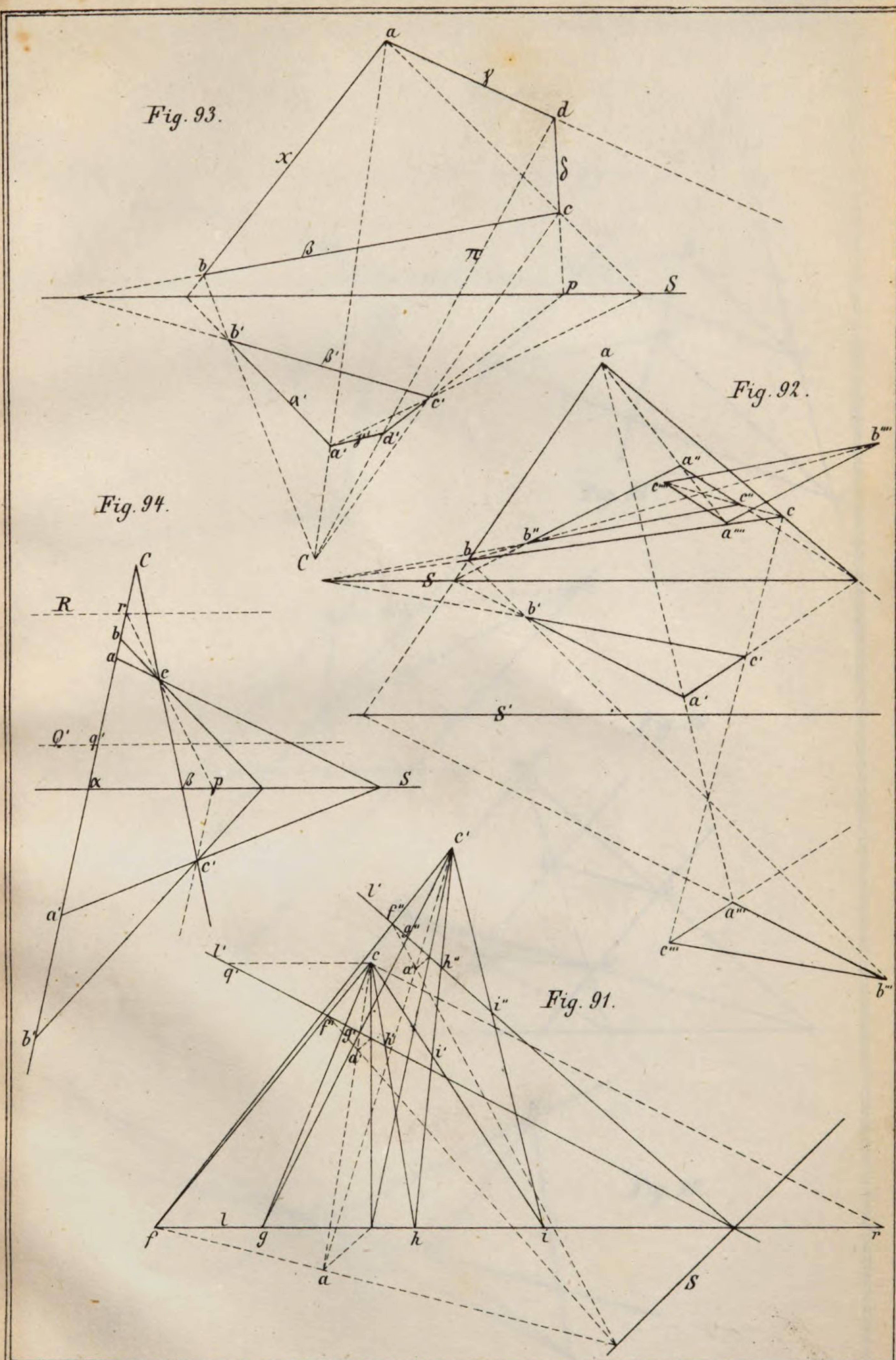


Fig. 93.

Fig. 92.

Fig. 94.

Fig. 91.

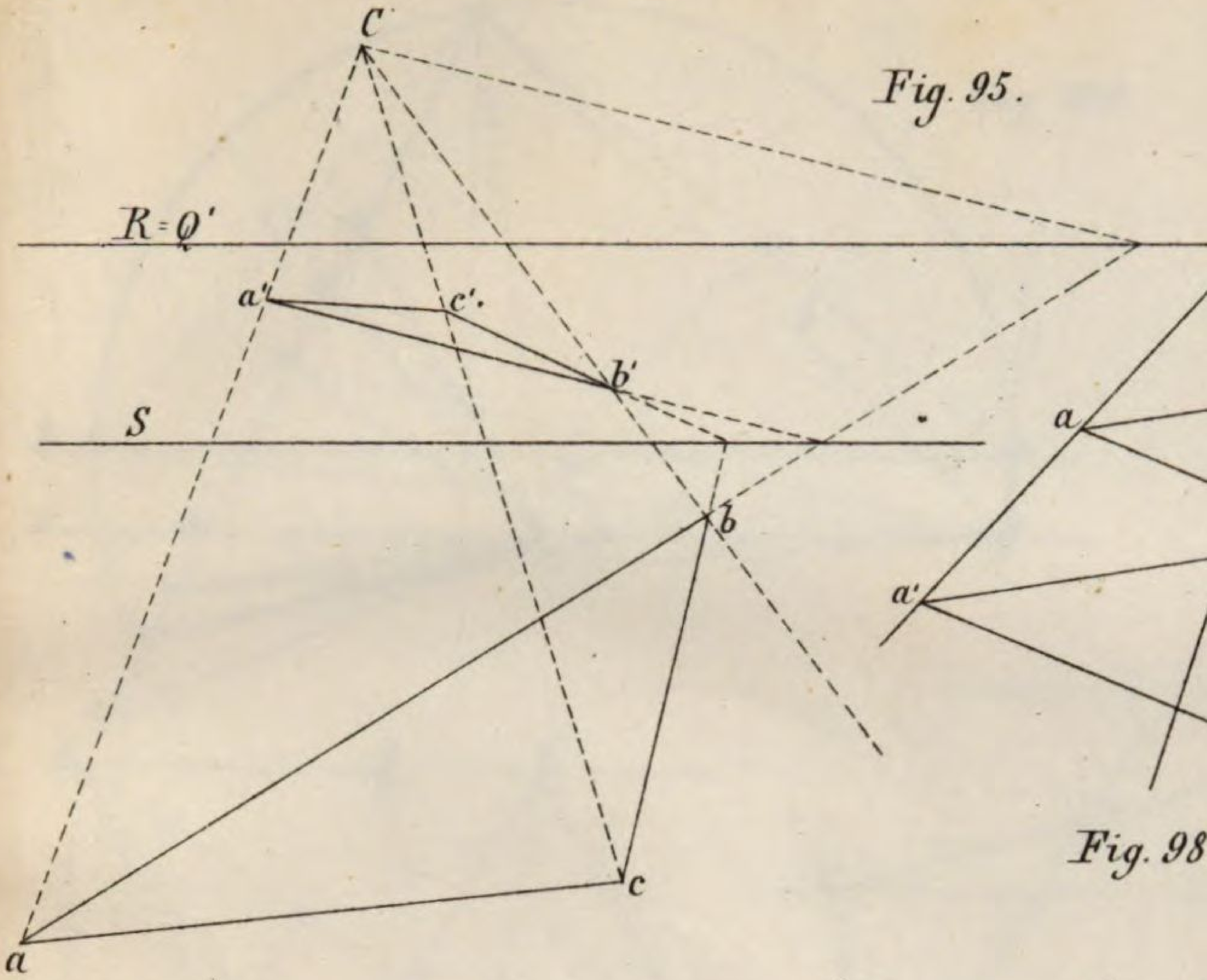


Fig. 95.

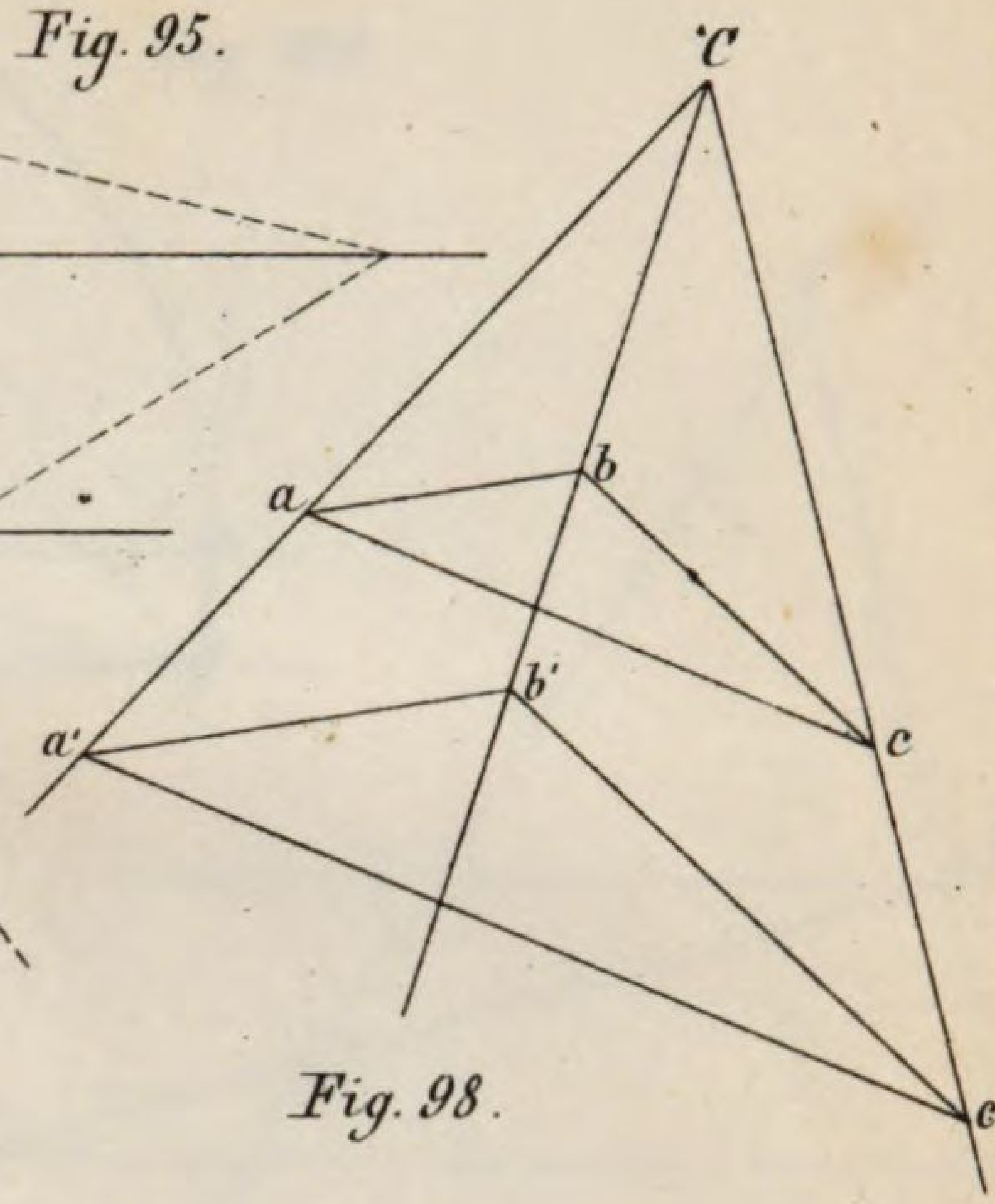


Fig. 98.

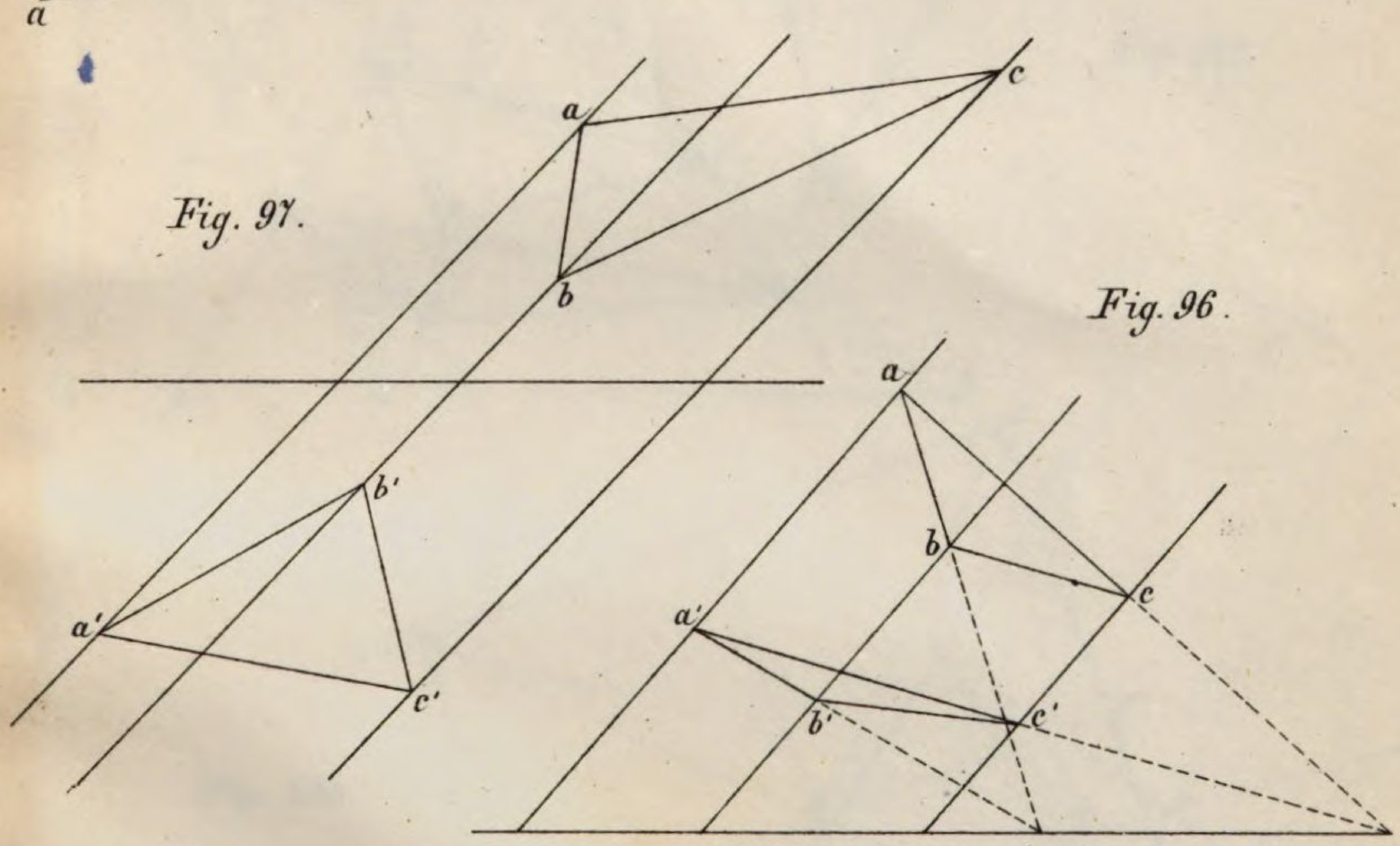


Fig. 97.

Fig. 96.

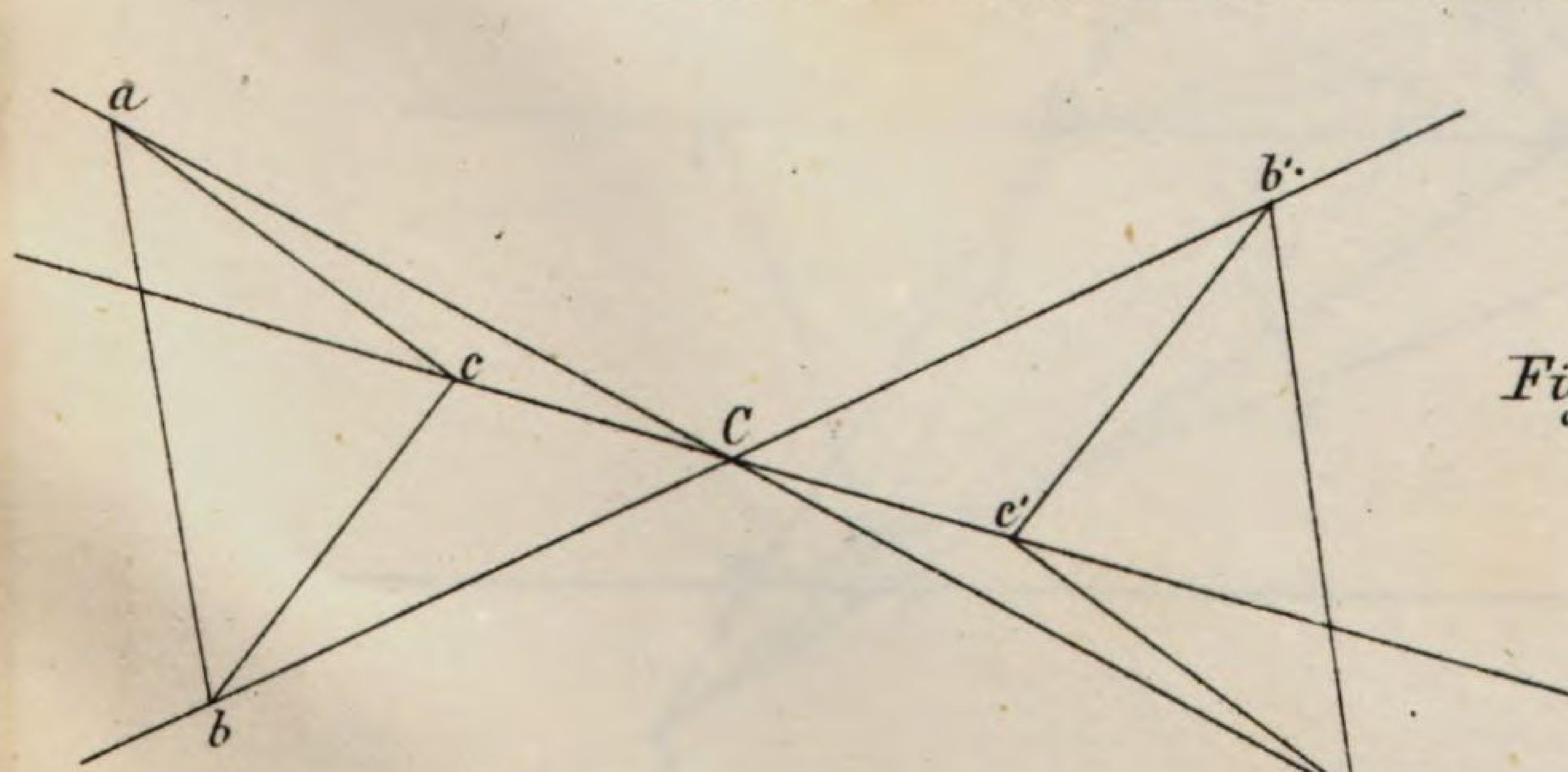


Fig. 99.

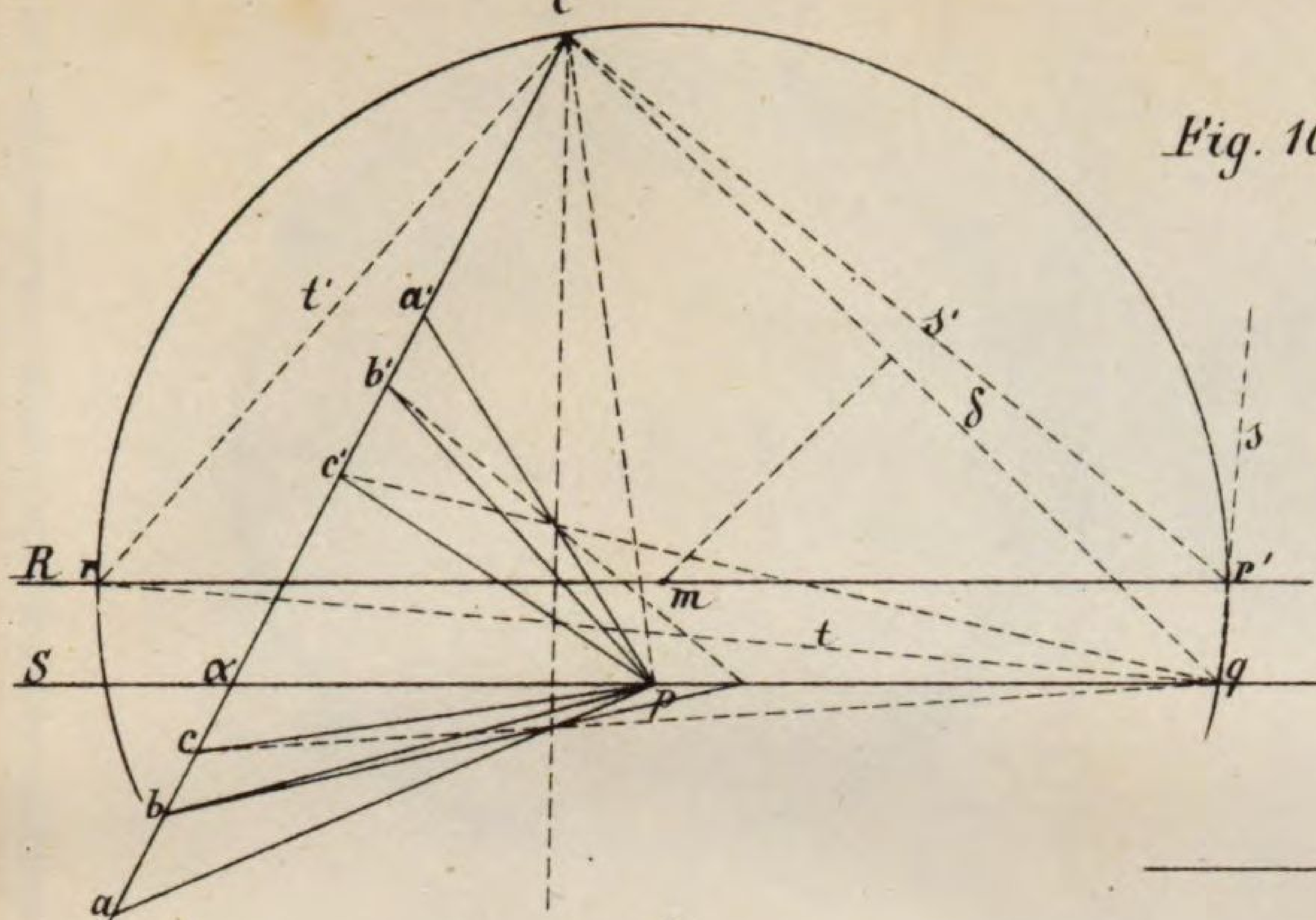


Fig. 100.

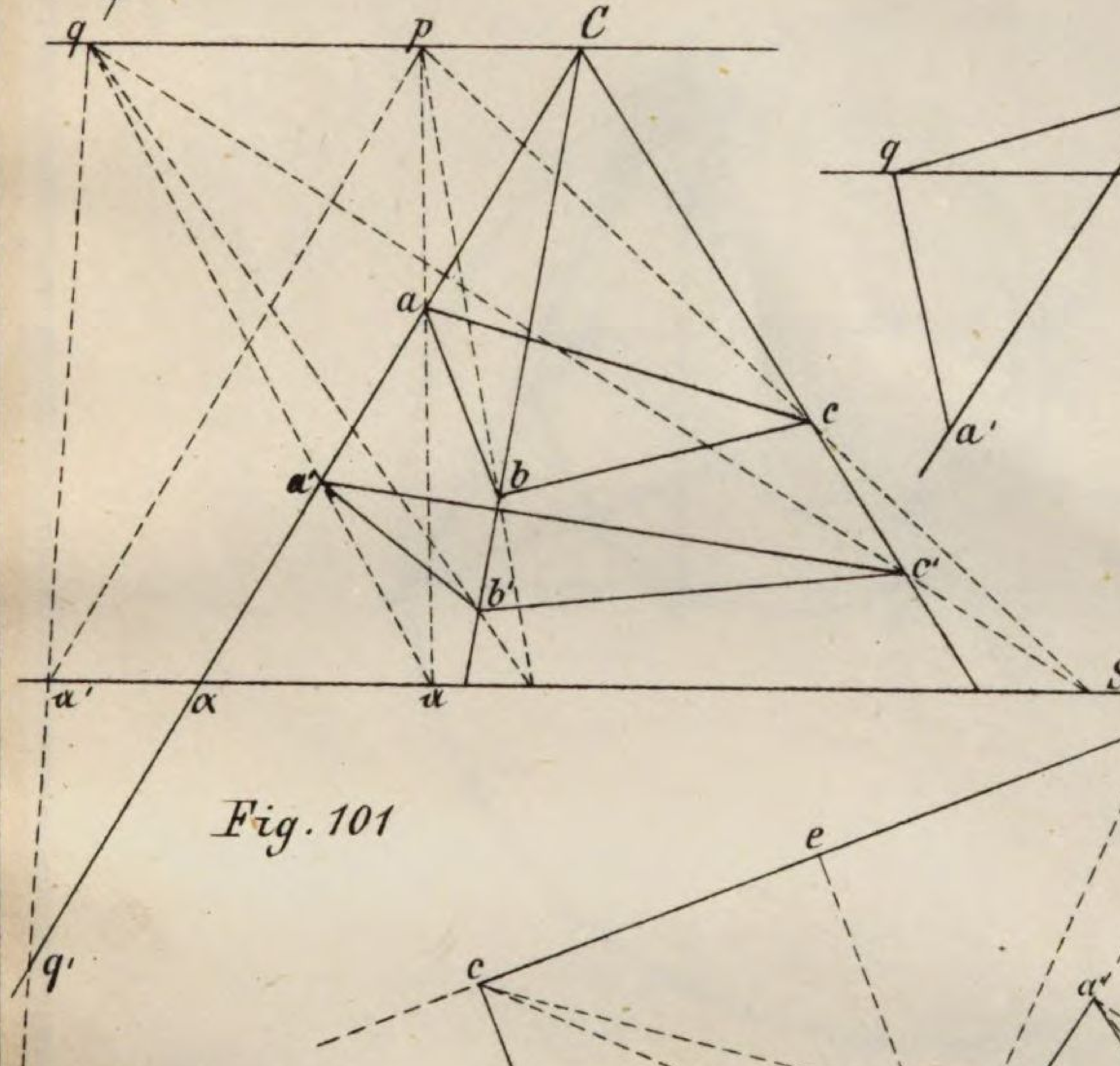


Fig. 101

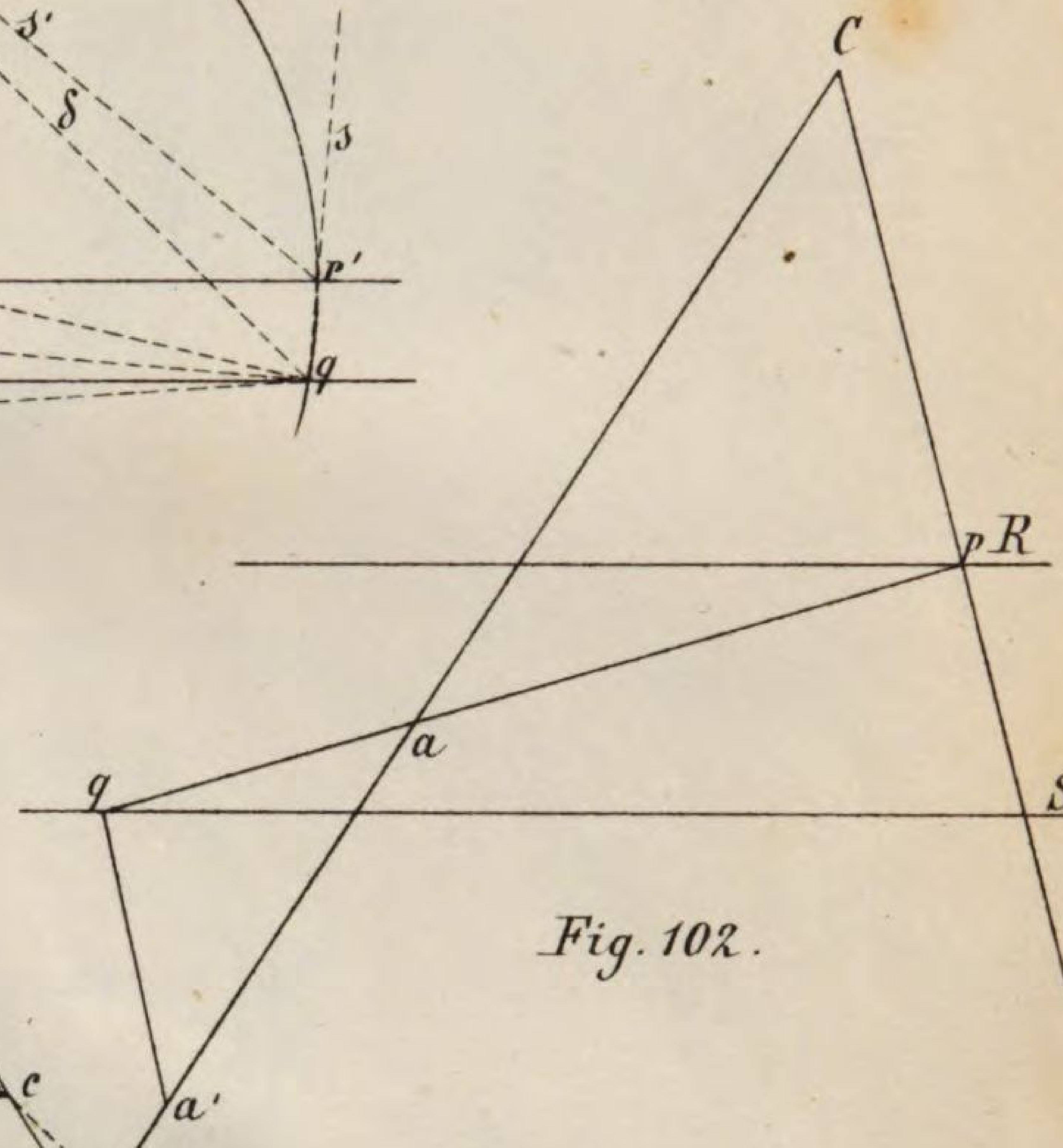


Fig. 102.

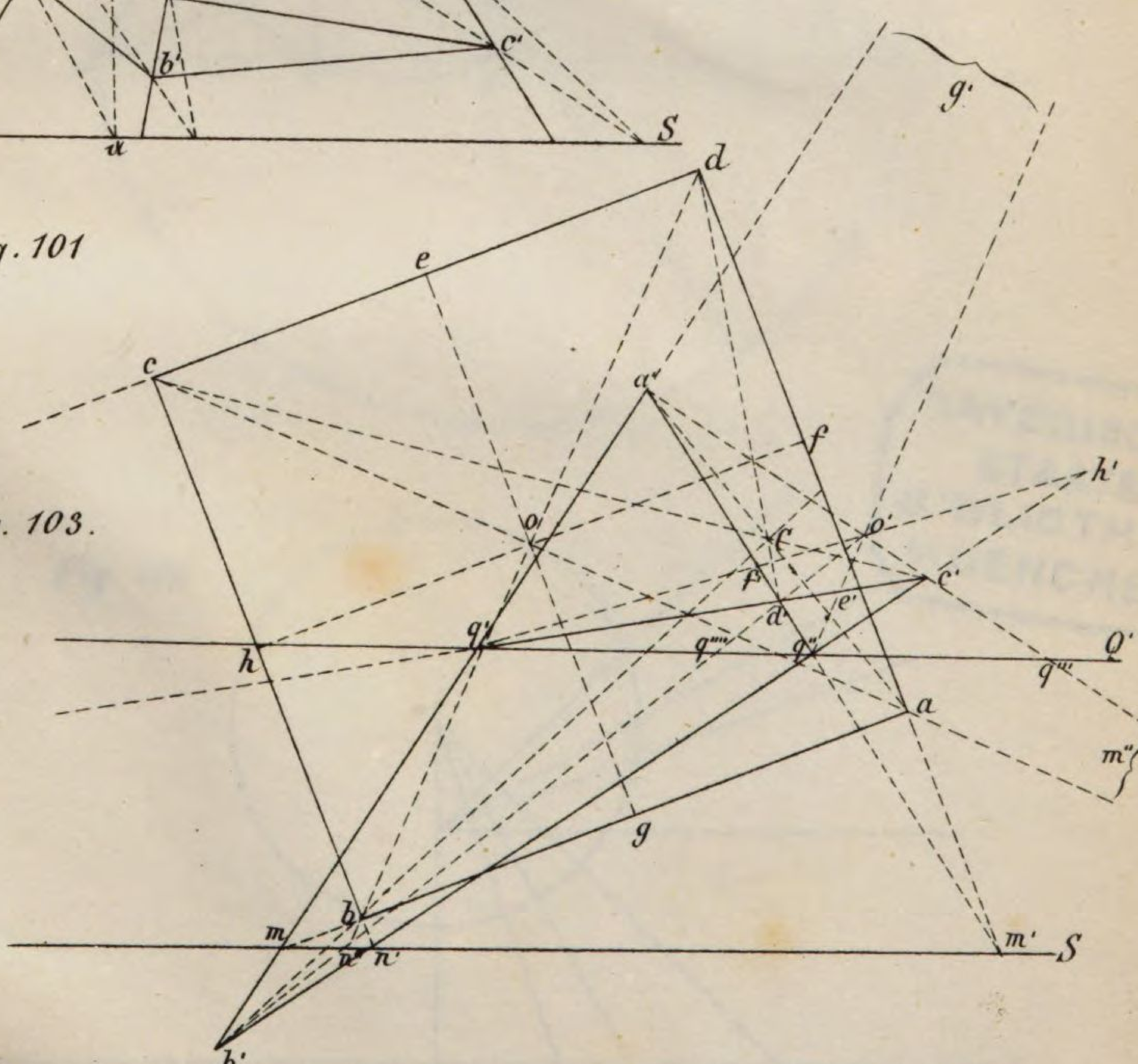


Fig. 103.

Fig. 104.

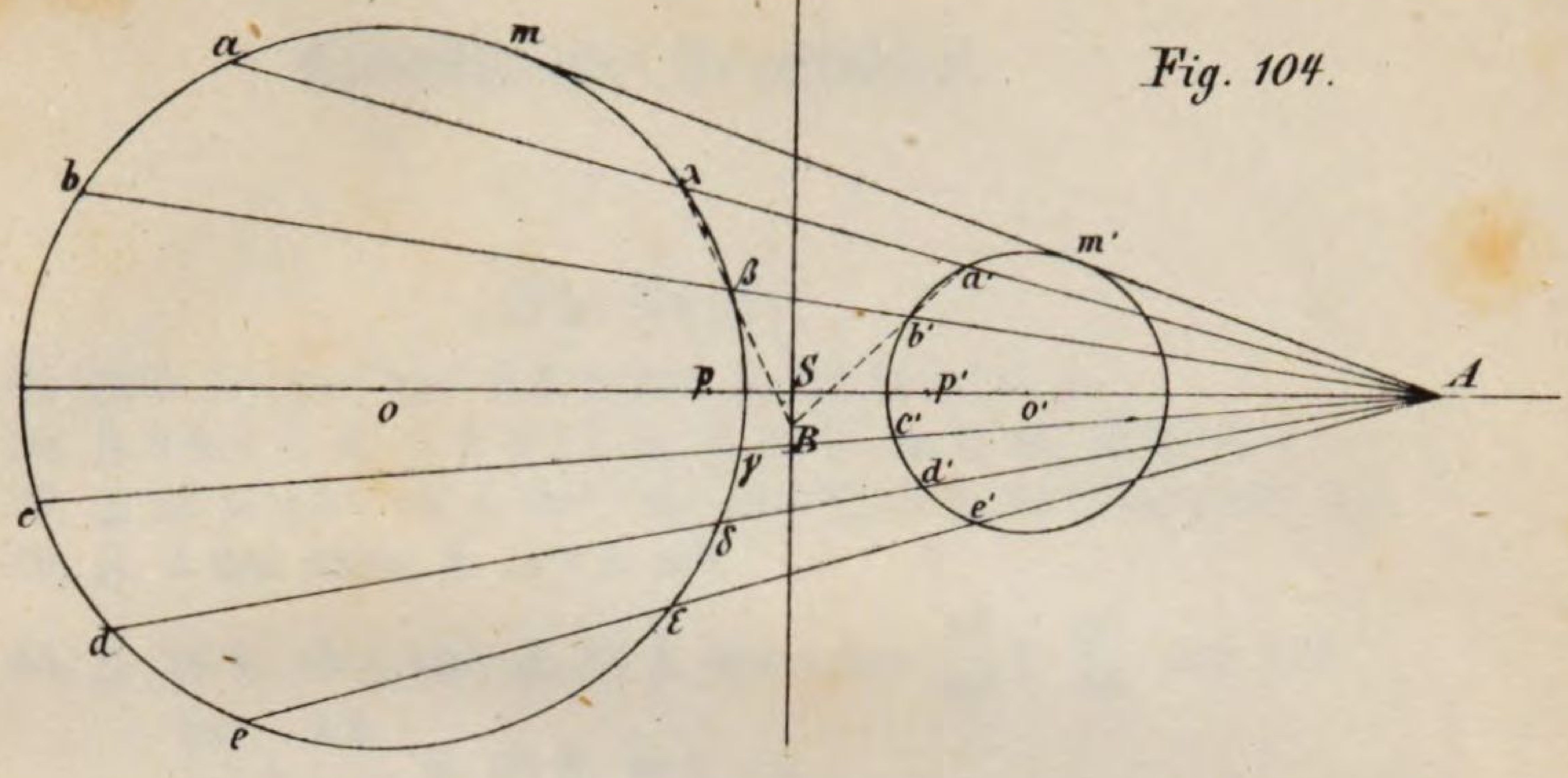


Fig. 105.

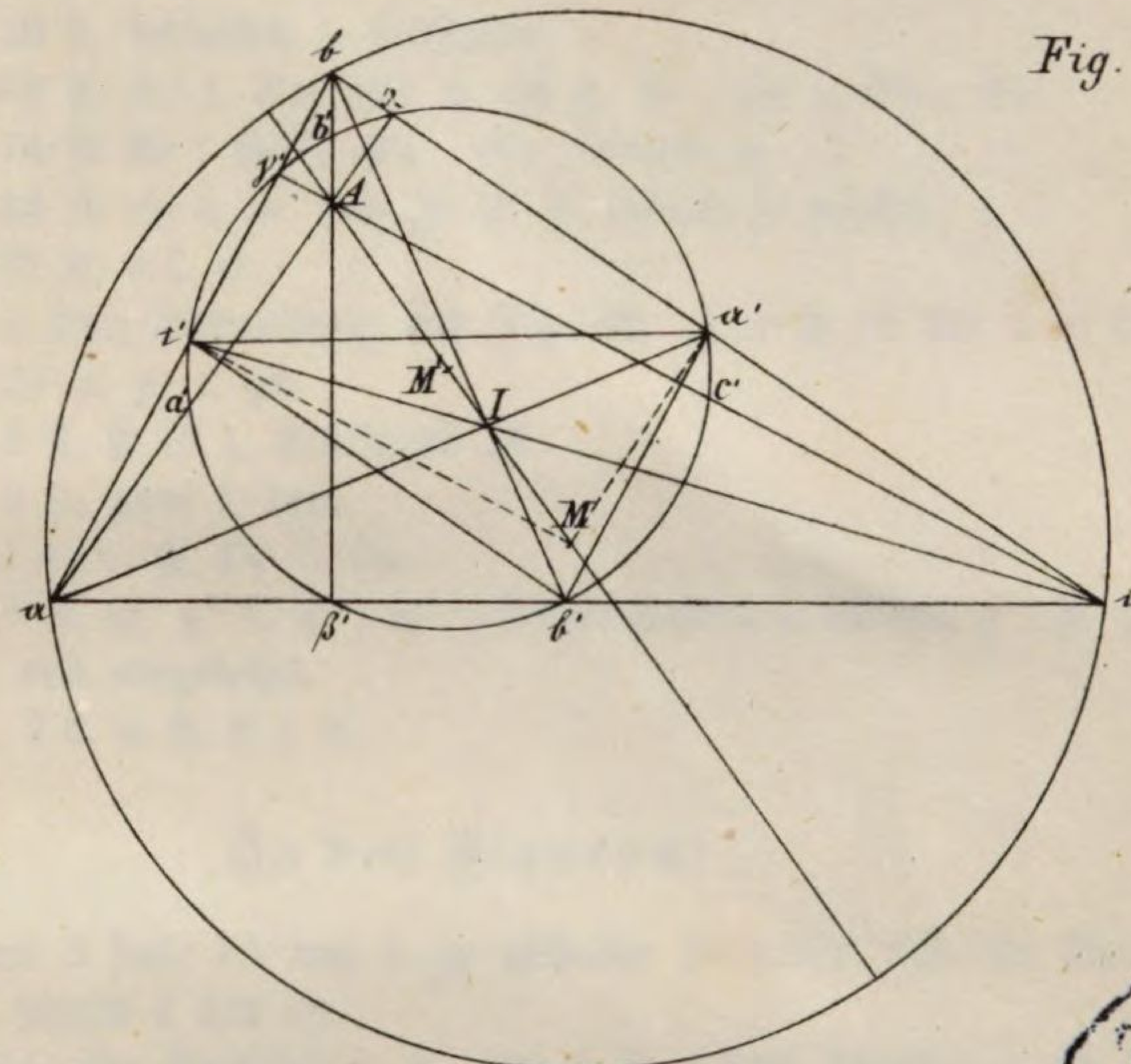
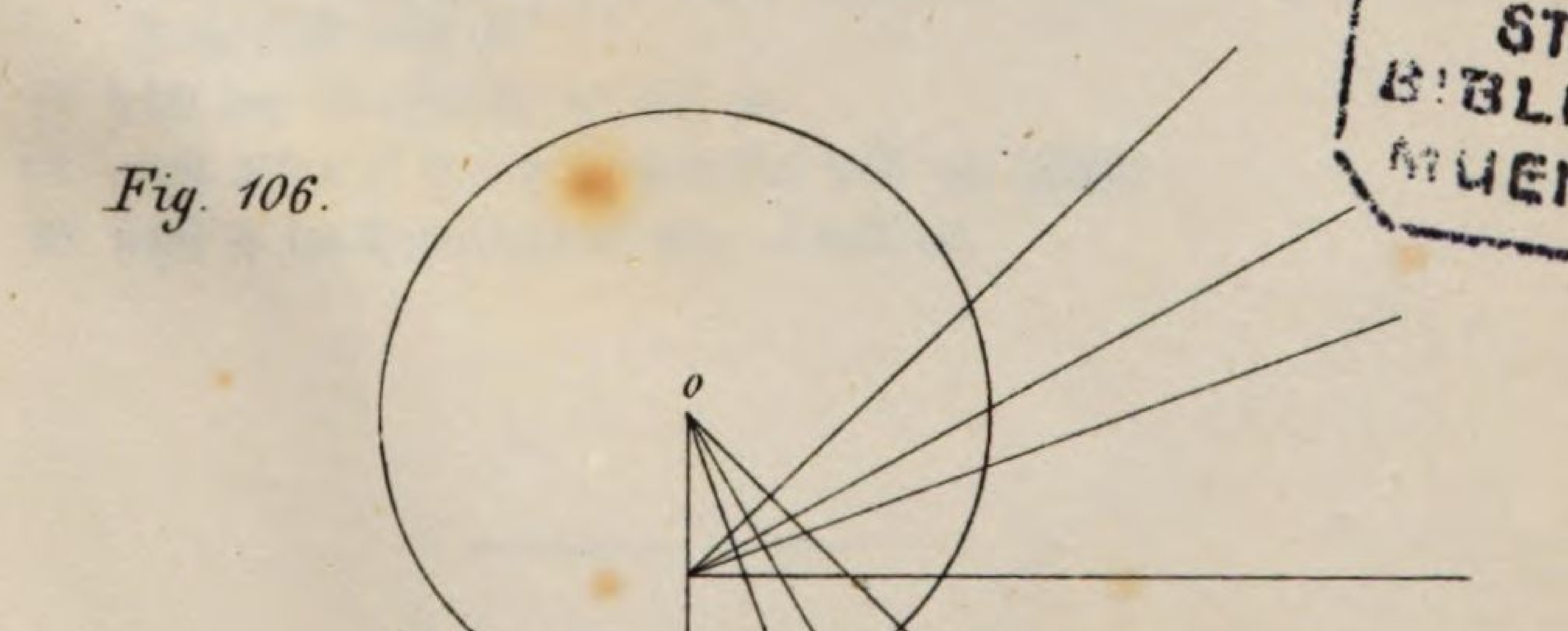


Fig. 106.



Sinnstörende Druckfehler.

Im Text:

Pag. 24, Zeile 24 statt qq″ lies q und Z. 33 st. π' l. π.
„ 25, Z. 3 st. h l. k, Z. 6 st. i l. g, Z. 10 st. ae l. ac, Z. 25 st. c′ l. e′.
„ 29, Z. 12 st. cb″. cb′ l. ba″. ba′ und Z. 13 st. ba″. ba′ l. cb″. cb′.
„ 39, Z. 2 von unten st. ot'^3 l. ot'^2.
„ 44, Z. 16 st. ob l. oa′, Z. 17 st. des ersten $\frac{p^2}{oa'}$ l. $\frac{p^2}{ob}$ und statt $\frac{ba'}{oa}$ l. $\frac{a'b}{oa'}$, Z. 16 st. ac l. ca.
„ 48, Z. 30 st. derselben l. desselben.
„ 49, Z. 33 st. $d\varkappa'$ l. $d'\varkappa'$ und Z. 34 st. $d\varkappa \,.\, d\varkappa'$ l. $d'\varkappa \,.\, d'\varkappa'$.
„ 50, Z. 14 st. $d\varkappa \,.\, d\varkappa'$ l. $d'\varkappa \,.\, d'\varkappa$; ebenso Z. 15.
„ 62, Z. 16 st. ca l. ac und Z. 17 st. (abcd) l. (abdc).
„ 69, Z. 31 st. o l. o′.
„ 70, Z. 2 fehlt Verweisung auf Fig. 68, Z. 8 st. B′ der l. ω' den.
„ 75, Z. 29 st. p^1 l. p^2.
„ 78, Z. 8 st. § 16 l. Lehrsatzes 18.
„ 98, Z. 9 st. zwei l. drei.
„ 102, Z. 2 v. u. st. Cb l. Cp.
„ 104, Z. 2 st. q′, q″ l. q‴, q⁗; im Folgenden l. überall q‴ st. q⁗ und umgekehrt.
„ 105, Z. 7 v. u. st. S′ l. S.

In den Figuren:

In Fig. 1 und 2 fehlt die von b zu ziehende Parallele und ihr Durchschnitt d mit ac.
„ „ 9 tilge den Buchstaben b, setze b st. γ und schreibe γ an den Fußpunkt von p′.
„ „ 27 fehlt der Buchstabe π' auf p.
„ „ 62 muß a′b′c′d′ durch c′ parallel mit oa gehen.
„ „ 68 fehlt a im Durchschnitt von ω mit ω'.